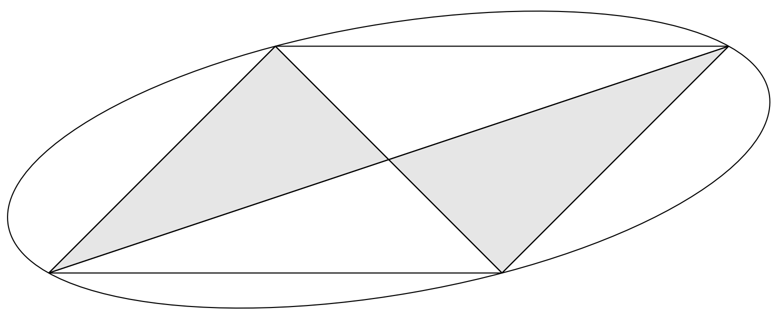
XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT

SOLUCIÓN PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



II Nivel

$(8° - 9°)$

2016

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2016 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas y le desea los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 25 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 1 de julio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida del $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida del $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área del ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área del $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. Carlos vende naranjas en la Feria donde tiene cierta cantidad de naranjas, vende 30% de ellas y al finalizar la Feria le quedan 280 naranjas. La cantidad de naranjas que vendió Carlos en la Feria es

   (a) 100

   (b) 110

   (c) 115

   (d) 120

   - Opción correcta: *d*)
   - Solución:
     Considere n el total de naranjas, tiene que vender 30%. Entonces le quedan $\dfrac{70n}{100}$ naranjas y ese número es 280; es decir:
     $$\begin{aligned} \frac{70n}{100} &= 280 \\ 70n &= 28\,000 \\ n &= 400 \end{aligned}$$
     Por lo tanto, Carlos vendió $400 - 280 = 120$ naranjas.

2. Una forma fraccionaria del número racional $0{,}05\overline{38}$ corresponde a

   (a) $\dfrac{5\,383}{99\,900}$

   (b) $\dfrac{5\,383}{999\,900}$

   (c) $\dfrac{53\,833}{999\,900}$

   (d) $\dfrac{53\,833}{9\,999\,000}$

   - Opción correcta: *c*)
   - Solución:
     Con $x = 0{,}05\overline{38}$ se procede a multiplicar a ambos lados de la igualdad por $10\,000$ y se obtiene $10\,000x = 538{,}38\overline{38}$.
     Al restar estas dos ecuaciones: $10\,000x - x = 538{,}38\overline{38} - 0{,}05\overline{38} \Rightarrow 9\,999x = 538{,}33$.
     Ahora se multiplica en ambos lados de la última igualdad por 100 y se obtiene:
     $999\,900x = 53\,833 \Rightarrow x = \dfrac{53\,833}{999\,900} \Rightarrow 0{,}05\overline{38} = \dfrac{53\,833}{999\,900}$.

3. Si $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=6$ y $ab=\dfrac{1}{2}$ para a y b números reales positivos, entonces el valor numérico de $a+b$ es

   (a) 2

   (b) 3

   (c) $\sqrt{2}$

   (d) $\sqrt{5}$

   - Opción correcta: a)
   - Solución:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=6 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a^2+b^2}{ab}=6\\ &\Leftrightarrow \quad a^2+b^2=6ab\\ &\Leftrightarrow \quad a^2+2ab+b^2=8ab\\ &\Leftrightarrow \quad (a+b)^2=8ab\\ &\Leftrightarrow \quad (a+b)^2=8\cdot\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \quad (a+b)^2=4\\ &\Leftrightarrow \quad a+b=\sqrt{4}\\ &\Leftrightarrow \quad a+b=2\end{aligned}$$

4. Si α y β son números enteros positivos, entonces en la ecuación $\alpha^{\beta}\cdot\beta^{2\alpha}\cdot(2\alpha+1)\cdot(2\beta+1)^2=158\,760$ el valor de $\beta-\alpha$ es

   (a) 1

   (b) 3

   (c) 5

   (d) 7

   - Opción correcta: a)
   - Solución:
     Al descomponer en factores primos el número 158 760 se obtiene $2^3\cdot3^4\cdot5\cdot7^2$. Al comparar la descomposición canónica del número con el miembro izquierdo de la ecuación se concluye que $\alpha=2$ y $\beta=3$. Luego $\beta-\alpha=1$.

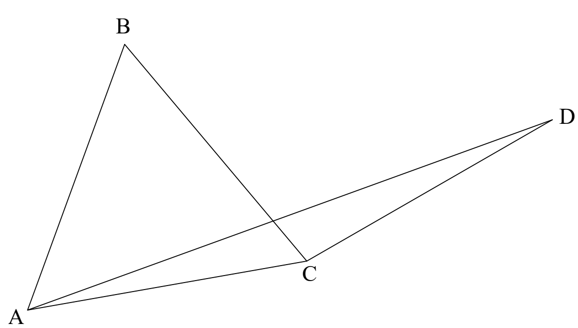
5. En la figura el $\triangle ABC$ es equilátero y $CB=CD$. Si $m\angle BCD=100°$, entonces $m\angle BAD$ es

   (a) 10°

   (b) 20°

   (c) 40°

   (d) 50°



- Opción correcta: d)
- Solución:
  Como $CB = CD$ y $\triangle ABC$ es equilátero, entonces $CD = CA$ y el $\triangle ACD$ es isósceles. En este triángulo, $m\angle ACD = 160° \Rightarrow m\angle CAD = m\angle CDA = 10°$.
  Dado que el $\triangle ABC$ es equiángulo, $m\angle BAC = 60° \Rightarrow m\angle BAD = 60° - 10° = 50°$.

6. Considere cuatro números primos a, b, c y d tales que $a + b = 54$, $a + d = 39$ y $c + d = 25$. El valor de $b + c$ es

   (a) 40

   (b) 46

   (c) 60

   (d) 64

- Opción correcta: a)
- Solución:
  Como la suma de un número impar con uno par es impar, en $a + d = 39$ se tiene que alguno de los dos debe ser par. Como el único número primo par es 2, entonces $a = 2$ o $d = 2$. Pero si $a = 2$, entonces $b = 52$, que no es primo. Por lo tanto, $d = 2$, $a = 37$, $b = 17$, $c = 23$ y así $b + c = 40$.

7. Sean x, y números reales tales que $4x + y = 3(x + 2y)$.
   El valor numérico de la expresión $\dfrac{2x^5 + x^3y^2 - y^5}{x^4y}$ es

   (a) $\dfrac{374}{25}$

   (b) $\dfrac{637}{25}$

   (c) $\dfrac{674}{65}$

   (d) $\dfrac{6\,374}{625}$

- Opción correcta: d)
- Solución:
  En esta expresión no hay un valor específico ni para x ni y; se procede a simplificar la expresión $4x + y = 3(x + 2y)$ y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 4x + y &= 3(x + 2y) \\ 4x + y &= 3x + 6y \\ x &= 5y \end{aligned}$$

Para determinar el valor numérico, primero simplificamos la expresión algebraica dada y después se sustituye x por $5y$; es decir:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^5 + x^3y^2 - y^5}{x^4y} &= \frac{2x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{y^4}{x^4} \\
&= \frac{10y}{y} + \frac{y}{5y} - \frac{y^4}{625y^4} \\
&= 10 + \frac{1}{5} - \frac{1}{625} \\
&= \frac{6\,374}{625}
\end{aligned}$$

8. Un trabajo de pintura puede ser completado por el equipo de Andrés en 2 horas y 30 minutos o por el equipo de Beatriz en 75 minutos, pero nunca trabajan simultáneamente. En una ocasión el equipo de Andrés inició el trabajo y realizó una fracción $\frac{m}{n}$ del total, e inmediatamente el equipo de Beatriz empezó a trabajar. El trabajo se terminó en 90 minutos. Si m y n no tienen divisores en común, se tiene que el valor de $m+n$ es

   (a) 5

   (b) 6

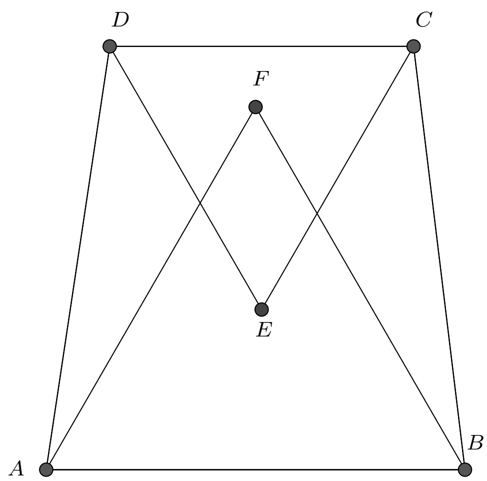
   (c) 7

   (d) 8

   - Opción correcta: *b*)
   - Solución:
     El equipo de Andrés realiza $\frac{m}{n}$ del trabajo por lo que el equipo de Beatriz realiza $\left(1 - \frac{m}{n}\right)$ del trabajo.

     Por lo tanto, se debe cumplir que $150 \cdot \dfrac{m}{n} + 75\left(1 - \dfrac{m}{n}\right) = 90$, de donde $\dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{5}$ y así $m + n = 6$.

9. Considere un trapecio isósceles $ABCD$, con $\overline{AB} \| \overline{CD}$, $AB = 7$, $CD = 5$ y la altura sobre $\overline{AB}$ de medida $5\sqrt{3}$. Si se trazan dos triángulos equiláteros en el interior del trapecio, tal como se muestra en la figura, entonces la medida de $\overline{EF}$ es



   (a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   (b) $\sqrt{3}$
   (c) $2\sqrt{3}$
   (d) $4\sqrt{3}$

   - Opción correcta: $b)$
   - Solución:
     Como el trapecio es isósceles, se tiene que la recta por $\overline{EF}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. La altura del triángulo ABF trazada desde F mide $7\sqrt{3}/2$ y la del triángulo CDE desde E mide $5\sqrt{3}/2$.
     Por lo tanto, si h es la altura del trapecio y $x = EF$, tenemos que:
     $h = \left(5\sqrt{3}/2 - x\right) + x + \left(7\sqrt{3}/2 - x\right)$
     Y así, $x = \sqrt{3}$.

10. La cantidad de números de la forma $41a25b$, donde a y b son dígitos, que son divisibles por 11 es

   (a) 7
   (b) 9
   (c) 10
   (d) 12

   - Opción correcta: $b)$
   - Solución:
     Para que el número $41a25b$ sea divisible por 11 debe cumplirse que $4 - 1 + a - 2 + 5 - b$ sea múltiplo de 11; es decir, $6 + a - b$ debe ser múltiplo de 11.
     Dado que a y b toman valores entre cero y nueve, se tiene que
     i. si $a = 0$ entonces $b = 6$
     ii. si $a = 1$ entonces $b = 7$
     iii. si $a = 2$ entonces $b = 8$

iv. si $a = 3$ entonces $b = 9$
v. si $a = 4$ entonces $10 - b$ debe ser múltiplo de 11, lo cual es imposible. Por lo tanto a$\neq 4$
vi. si $a = 5$ entonces $b = 0$
vii. si $a = 6$ entonces $b = 1$
viii. si $a = 7$ entonces $b = 2$
ix. si $a = 8$ entonces $b = 3$
x. si $a = 9$ entonces $b = 4$

En total hay 9 números que cumplen la condición requerida, estos números son 410 256, 411 257, 412 258, 413 259, 415 250, 416 251, 417 252, 418 253 y 419 254.

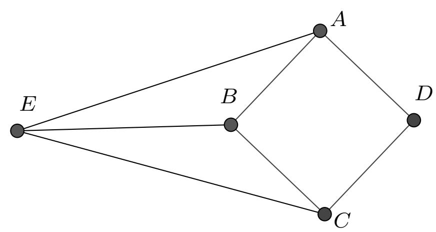
11. Considere la figura adjunta en la que el $\square ABCD$ es un cuadrado y $AE = CE$. Si se sabe que $BE = 4\sqrt{2}$ y las áreas del $\square ABCD$ y del $\triangle ABE$ son iguales, entonces el área del cuadrado $ABCD$ es

(a) 2

(b) 4

(c) 8

(d) 16



- Opción correcta: $b)$
- Solución:
Como $AE = CE$, se tiene que $D - B - E$. La altura h del triángulo ABE trazada desde el vértice A corresponde a la mitad de la diagonal del cuadrado. Por lo tanto, si l es la medida del lado del cuadrado, dicha altura es $h = l\sqrt{2}/2$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}(ABE) &= (ABCE)\\ \Rightarrow \frac{BE \cdot h}{2} &= l^2\\ \Rightarrow \frac{4\sqrt{2} \cdot l\sqrt{2}}{4} &= l^2\end{aligned}$$

Por lo que $l = 2$. Así, el área del cuadrado es 4.

12. El doble del producto de las edades de un padre y su hijo es 2 016. Una posible edad del padre cuando su hijo nació es

(a) 35

(b) 38

(c) 40

(d) 42

- Opción correcta: $b)$
- Solución:
Observe que $2\,016 = 2 \cdot 18 \cdot 56$; por lo que una posibilidad para el producto de las edades es $18 \cdot 56$.

Así, una posibilidad es que el hijo tenga 18 años y su padre 56 años.

Por lo tanto, el padre tenía 38 años cuando nació su hijo.

13. En un triángulo ABC se tiene que la medida del $\angle ACB$ es $40°$. Si P es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ABC$, entonces la medida del $\angle APB$ es

    (a) $80°$

    (b) $100°$

    (c) $110°$

    (d) $140°$

    - Opción correcta: c)
    - Solución:
      Como la suma de las medidas de los ángulos internos de todo triángulo es $180°$, se tiene que la suma de las medidas de los ángulos $\angle CAB$ y $\angle CBA$ es $140°$.
      En el triángulo APB, las medidas de los ángulos $\angle PAB$ y $\angle PBA$ suman $70°$, debido a que $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ son bisectrices. Por lo tanto, $m\angle APB = 110°$.

14. En un grupo de colegio de 32 estudiantes, 20 juegan futbol, 15 practican baloncesto y 12 juegan ajedrez, pero ninguno realiza las tres actividades. La cantidad de alumnos que realizan dos actividades es

    (a) 9

    (b) 12

    (c) 15

    (d) 18

    - Opción correcta: c)
    - Solución:
      Al sumar la cantidad de estudiantes que juegan al menos un deporte, estamos contabilizando dos veces los que practican dos deportes. Como además ninguno hace los tres a la vez, se tiene que el número deseado es $20 + 15 + 12 - 32 = 15$ alumnos.

15. Dos motocicletas parten de un mismo lugar y viajan en direcciones opuestas. La primera motocicleta viaja a 46 kilómetros por hora y la segunda motocicleta viaja a 60 kilómetros por hora. El tiempo, en horas, para que la distancia entre las motocicletas sea 212 kilómetros es

    (a) 1

    (b) 2

    (c) 3

    (d) 4

    - Opción correcta: $b)$
    - Solución:
      Considere Moto 1 y Moto 2, a las dos motocicletas.
      De acuerdo a lo enunciado en el problema, se tiene:
      Moto 1
      $46 = \frac{d}{x}$, entonces $d = 46x$, donde $t = x$ lo que se necesita averiguar.
      De modo similar,
      Moto 2
      $60 = \frac{d}{x}$, entonces $d = 60x$, donde $t = x$ lo que se necesita averiguar.
      Como ambas motocicletas se encontrarán a 212 kilómetros una de la otra, se forma la siguiente ecuación:
      $46x + 60x = 212$, entonces $x = 2$.
      Las dos motocicletas estarán a 212 kilómetros una de la otra a las 2 horas de haber partido.

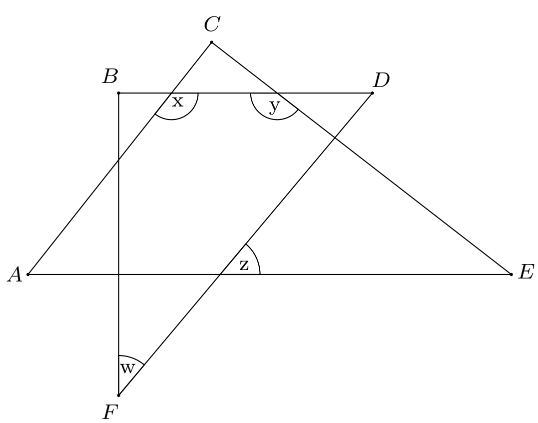
16. En la figura $\overline{AC} \parallel \overline{FD}$, $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$, $\overline{BD} \perp \overline{BF}$ y $\overline{AC} \perp \overline{CE}$. Entonces $x + y + z + w$ es

    (a) 270°

    (b) 360°

    (c) 390°

    (d) 450°



    - Opción correcta: $b)$
    - Solución:
      Sea G, H, P intersecciones de $\overline{AC}$ con $\overline{BD}$, $\overline{AE}$ con $\overline{DF}$ y $\overline{CE}$ con $\overline{BD}$ respectivamente.
      Vemos que el $\square AGDH$ es un paralelogramo, por lo que si $m\angle AGD = x$ entonces $z = 180° - x$. Además, $m\angle AHF = z = 180° - x$.

Luego, de acuerdo con el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de todo triángulo, se tiene $90° + w + z = 180° \Rightarrow 90° + w + (180° - x) = 180° \Rightarrow w = x - 90°$.

Por otra parte, $m\angle GCP + m\angle GPC = x$, por el teorema del ángulo externo; como $m\angle GCP = 90° \Rightarrow m\angle GPC = x - 90°$.
Entonces $y = 180° - (x - 90°) = 270° - x$.
Finalmente $x + y + z + w = x + (270° - x) + (180° - x) + (x - 90°) = 360°$.

17. La cantidad de parejas (a, b) de números enteros positivos, tales que $\dfrac{ab}{a+b} = 18$ corresponde a

(a) 15

(b) 18

(c) 30

(d) 36

- Opción correcta: $a)$
- Solución:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{a+b} &\Rightarrow ab = 18(a+b) \\ &\Rightarrow ab - 18a - 18b = 0 \\ &\Rightarrow ab - 18a - 18b + 18^2 = 18^2 \\ &\Rightarrow a\,(b-18) - 18\,(b-18) = 18^2 \\ &\Rightarrow (a-18)(b-18) = 324 \\ &\Rightarrow (a-18) \mid 324 \end{aligned}$$

Dado que $324 = 2^2 \cdot 3^4$, la cantidad de divisores positivos de 324 es $(4+1)\cdot(2+1) = 15$. Para cada divisor positivo de 324 existe un valor de a. Así hay 15 posibles valores para a. Por lo tanto hay 15 parejas (a, b) de enteros positivos.

18. La probabilidad de que al lanzar una moneda al aire 12 veces caigan exactamente cuatro coronas es

(a) $\dfrac{48}{4\,096}$

(b) $\dfrac{144}{4\,096}$

(c) $\dfrac{495}{4\,096}$

(d) $\dfrac{495}{11\,880}$

- Opción correcta: $c)$

- Solución:
  Considere C por corona y E por escudo. El resultado de los 12 lanzamientos pueden expresarse por una sucesión de longitud 12 formada por las caras de la moneda C y E, entonces el número total de posibilidades es $2^{12} = 4\,096$. Los casos favorables es cuando se lanza la moneda 12 veces y salen exactamente 4 veces corona, entonces el total de casos favorables es ${}_{12}C_4 = \dfrac{12!}{4!\,(12-4)!} = 495$.
  Por lo tanto, la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire 12 veces salgan exactamente 4 coronas es $\dfrac{495}{4\,096}$.

19. Si en $\dfrac{10a+6}{7\left(\sqrt{3a+4}+\sqrt{1-2a}\right)}$ se racionaliza el denominador y se simplifica al máximo el resultado, se obtiene una expresión cuyo numerador es

    (a) $\sqrt{3a+4}+\sqrt{1-2a}$

    (b) $\sqrt{3a+4}-\sqrt{1-2a}$

    (c) $2\left(\sqrt{3a+4}+\sqrt{1-2a}\right)$

    (d) $2\left(\sqrt{3a+4}-\sqrt{1-2a}\right)$

- Opción correcta: $d)$
- Solución:
  Aplicando los métodos de racionalización y factorización se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{10a+6}{7\left(\sqrt{3a+4}+\sqrt{1-2a}\right)} &= \frac{10a+6}{7\left(\sqrt{3a+4}+\sqrt{1-2a}\right)} \cdot \frac{\sqrt{3a+4}-\sqrt{1-2a}}{\sqrt{3a+4}-\sqrt{1-2a}} \\
&= \frac{(10a+6)\left(\sqrt{3a+4}-\sqrt{1-2a}\right)}{7\left(\sqrt{3a+4}+\sqrt{1-2a}\right)\left(\sqrt{3a+4}-\sqrt{1-2a}\right)} \\
&= \frac{(10a+6)\left(\sqrt{3a+4}-\sqrt{1-2a}\right)}{7\left(\left(\sqrt{3a+4}\right)^2-\left(\sqrt{1-2a}\right)^2\right)} \\
&= \frac{(10a+6)\left(\sqrt{3a+4}-\sqrt{1-2a}\right)}{7\,(3a+4-1+2a)} \\
&= \frac{2\,(5a+3)\left(\sqrt{3a+4}-\sqrt{1-2a}\right)}{7\,(5a+3)} \\
&= \frac{2\left(\sqrt{3a+4}-\sqrt{1-2a}\right)}{7}
\end{aligned}$$

20. Esmeralda le pide a su hermano Sergio que escriba un número de seis dígitos diferentes de la forma $1a2b3c$ de modo que sea el mayor múltiplo de 15 posible. El valor de $|a^2 - b^2|$ es

    (a) 15

    (b) 32

    (c) 45

    (d) 65

    - Opción correcta: *b*)
    - Solución:
      Para ser múltiplo de 15 debe ser divisible por 5 y por 3. Para ser divisible por 5 el dígito de las unidades debe ser 0 o 5, y para ser divisible por 3 la suma de los dígitos debe ser múltiplo de 3.

      I Caso: $c = 0$
      $1 + 2 + 3 + a + b + 0 = 6 + a + b = 3k \Rightarrow a + b \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$

      Como se busca el número mayor, se debe tomar el mayor valor posible de a, que es $a = 9$, $b = 6$, $a + b = 15$. Se tiene así el número 192 630.

      II Caso: $c = 5$
      $1 + 2 + 3 + a + b + 5 = 11 + a + b = 3k \Rightarrow a + b \in \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$

      Como se busca el número mayor, se debe tomar el mayor valor posible de a, que es $a = 9$, $b = 7$, $a + b = 16$. Se tiene así el número 192 735.

      El mayor es 192 735 con $a = 9$ y $b = 7$ por lo que $|a^2 - b^2| = 32$.

21. Considere un $\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$. Sea D en $\overleftrightarrow{AC}$ tal que $\overline{BD} \perp \overline{AB}$ y sea E el pie de la altura sobre $\overline{AB}$ trazada desde C. Si $m\angle BAC = 45°$ y $CE = 1$, entonces CD es

    (a) $\sqrt{2}$

    (b) $2\sqrt{2}$

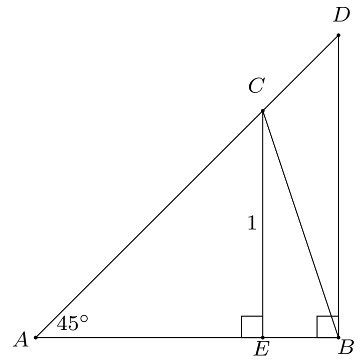
    (c) $2 - \sqrt{2}$

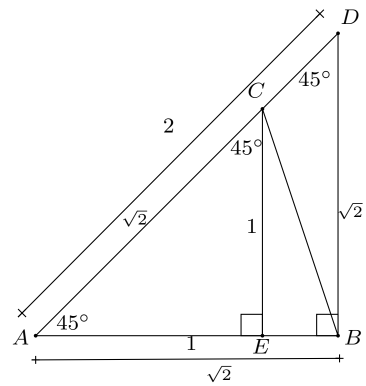
    (d) $4 - \sqrt{2}$

    - Opción correcta: *c*)

- Solución:

  De acuerdo con el enunciado tenemos lo que se muestra en la figura adjunta.
  Vemos que $m\angle ACE = 45°$, por lo que el $\triangle AEC$ es isósceles y $AE = 1$.
  Por el Teorema de Pitágoras, $AC = \sqrt{2} = AB$.
  Como $\overline{CE} \parallel \overline{BD}$, entonces $m\angle ADB = 45°$; así, el $\triangle ABD$ es isósceles, por lo que $BD = \sqrt{2}$.
  Utilizando el Teorema de Pitágoras $AD = 2$.





  Finalmente, $CD = AD - AC = 2 - \sqrt{2}$.

22. De un total de 1 600 estudiantes de primer ingreso a cierta universidad, 581 desean matricular una carrera relacionada con las ciencias sociales, 972 optan por una ingeniería y 215 les gustaría matricular una carrera en ambas áreas.
    Los restantes estudiantes opinan que se inscribirían en carreras asociadas a otras áreas distintas a la ciencias sociales o ingenierías.
    De acuerdo con esta información, la probabilidad que un estudiante seleccione una carrera en otra area es

    (a) $\dfrac{43}{120}$

    (b) $\dfrac{131}{314}$

    (c) $\dfrac{131}{800}$

    (d) $\dfrac{1\,019}{1\,600}$

- Opción correcta: $c)$
- Solución:

  La información dada se resume en la siguiente tabla

Ingeniería	Ciencias Sociales Sí	Ciencias Sociales No	Total
Sí	215	757	972
No	366	262	628
Total	581	1 019	1 600

De acuerdo con los datos de la tabla anterior, se tiene que hay 262 estudiantes que no desean matricular una carrera relacionada con ciencias sociales o ingeniería. Por lo tanto, la probabilidad de que un estudiante seleccione otra área es $\dfrac{262}{1\,600} = \dfrac{131}{800}$.

23. Una expresión equivalente a $\sqrt{9-\sqrt{72}}$ es

   (a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

   (b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

   (c) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

   (d) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

   - Opción correcta: *d*)
   - Solución:

$$\begin{aligned} 9-\sqrt{72} &= 9-2\sqrt{18} \\ &= 6+3-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{3} \\ &= \left(\sqrt{6}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 \\ &= (\sqrt{6}-\sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

Así $\sqrt{9-\sqrt{72}} = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}-\sqrt{3}$

24. Un grupo de 13 personas se sientan en una mesa circular. Las mujeres han decidido decir la verdad entre ellas y mentirle a los hombres. Los hombres han decidido decir la verdad entre ellos y mentirle a las mujeres.
La primer persona le dice a quien está a su derecha: "*en nuestro grupo la mayoría son hombres*", esta le dice a quien está a la derecha: "*en nuestro grupo la mayoría son mujeres*", y siguen así hasta que la última persona le dice a la primera: "*en nuestro grupo la mayoría son hombres*".
Si se sabe que la primer persona le habla a una persona del mismo sexo, entonces con certeza la cantidad de hombres en la mesa es

   (a) 5

   (b) 6

   (c) 7

   (d) 8

   - Opción correcta: *c*)

- Solución:
  Analizando el inicio de la conversación, hay dos posibilidades:
  - Una mujer le habla a una mujer, por lo que es verdad que la mayoría son hombres. En este caso, la distribución sería

Habla	M	M	H	H	M	M	H	H	M	M	H	H	M
Dice que la mayoría es	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H

    En este caso, la mayoría son mujeres y contradice lo que inicialmente se había indicado (la mayoría son hombres).
  - Un hombre le habla a un hombre, por lo que es verdad que la mayoría son hombres. En este caso, la distribución sería

Habla	H	H	M	M	H	H	M	M	H	H	M	M	H
Dice que la mayoría es	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H

    Así que la mayoría son hombres efectivamente.

  Por lo tanto, hay 7 hombres.

25. La adición $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}+\cdots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$ es equivalente a

    (a) $\dfrac{97}{98}$

    (b) $\dfrac{98}{99}$

    (c) $\dfrac{99}{100}$

    (d) $\dfrac{100}{101}$

- Opción correcta: c)
- Solución:
  Observe que la adición dada es equivalente a:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$$

  Es decir, cada término de la adición es de la forma.

$$\frac{1}{n\,(n+1)} \text{ para } 1 \leq n \leq 99$$

  Dado que $\dfrac{1}{n\,(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ se tiene que:

  - Para $n=1 \to \dfrac{1}{1\cdot 2}=1-\dfrac{1}{2}$
  - Para $n=2 \to \dfrac{1}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$
  - Para $n=3 \to \dfrac{1}{3\cdot 4}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$

Y así sucesivamente hasta que $n = 99$ para el cual se cumple que:

$$\frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{100} \\
&= \frac{99}{100}
\end{aligned}$$