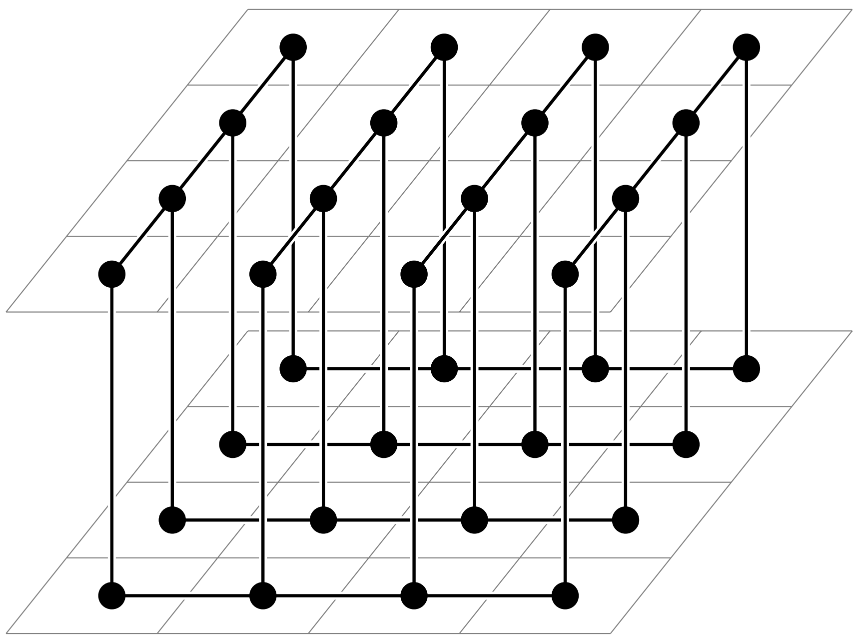
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - UTN - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



II Nivel

($8^\circ - 9^\circ$)

2017

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2017 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 25 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 30 de junio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. En una fábrica, 15 máquinas empacan 15 bolsas de arroz en 15 segundos. La cantidad de bolsas de arroz que se empacan con 60 máquinas en 60 segundos es

   (a) 4

   (b) 15

   (c) 60

   (d) 240

- Opción correcta: *d*
- Solución:

  Cada máquina empaca 1 bolsa en 15 segundos por lo que empaca 4 bolsas en 60 segundos.

  Dado que son 60 máquinas, tienen capacidad para 240 bolsas.

2. En figura adjunta A, B, C y D representan, cada una, un dígito distinto. El valor de $A+B+C+D$ es

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D \\ +\quad A\,B\,C \\ \hline 2\ 0\ 1\ 7 \end{array}$$

   (a) 15

   (b) 16

   (c) 17

   (d) 18

- Opción correcta: b

- Solución:

  Como A es un dígito, se tiene $A = 1$ o $A = 2$, pero como $A + B$ termina en 0, se debe "llevar 1" por lo que A debe ser 1.

  Igualmente, $C + B$ termina en 1 y se debe "llevar 1", por lo que $A + B$ debe ser 9 y como $A = 1$ se tiene $B = 8$.

  Entonces $C+B = 11$ y $C = 3$. Finalmente, como $D+C = 7$ se tiene $D = 4$, $\therefore A+B+C+D = 1 + 8 + 3 + 4 = 16$.

3. Un turista hace un viaje durante varios días. El primer día recorre una quinta parte del total de la distancia por recorrer durante todo viaje. El segundo día recorre 21 kilómetros y luego de hacerlo se encuentra a la mitad del recorrido total. La cantidad de kilómetros recorridos por el turista durante los dos primeros días es

   (a) 14

   (b) 21

   (c) 35

   (d) 70

- Opción correcta: c

- Solución:

  Denote x: cantidad de kilómetros recorridos el primer día.

  El primer día recorre una quinta parte del total de la distancia por recorrer durante todo viaje, por lo que la cantidad de kilómetros por recorrer luego del primer día de viaje es $4x$.

  El segundo día, el turista recorre 21 kilómetros, por lo que ha luego de hacerlo ha recorrido $x+21$ kilómetros y le falta por recorrer $4x - 21$ kilómetros.

  Luego del recorrido del segundo día, el viajero se encuentra a la mitad del recorrido total, por lo que $x + 21 = 4x - 21$. Luego, la cantidad de kilómetros recorridos el primer día es $x = 14$.

  Finalmente, la cantidad de kilómetros recorridos por el viajero durante los dos primeros días es $14 + 21 = 35$.

4. Se realizó un experimento del cual se obtuvieron cuatro resultados posibles: A, B, C y D. Los cuatro resultados son mutuamente excluyentes. Se tiene que la probabilidad de que ocurra A es $P(A) = 0{,}3$; la probabilidad de que ocurra B es $P(B) = 0{,}3$ y la probabilidad de que ocurra D es $P(D) = 0{,}25$. La probabilidad de que ocurra C es

   (a) 0,10

   (b) 0,15

   (c) 0,20

   (d) 0,25

- Opción correcta: b
- Solución:

  Por definición, como los resultados son mutuamente excluyentes, se sabe que la suma de las probabilidades de los resultados posibles es 1.

  De esta forma, $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$.

  Es decir, $1 - [P(A) + P(B) + P(D)] = P(C)$. De esta forma se obtiene $1 - [0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}25] = 0{,}15$

5. Cuando a un barril le falta 30 % para llenarse, contiene 30 litros más que cuando está lleno hasta 30 %. La cantidad de litros que le caben al barril es

   (a) 60

   (b) 75

   (c) 90

   (d) 100

- Opción correcta: b

- Solución:

  Sea x la capacidad del barril. Cuando le falta el 30 % para llenarse, la capacidad del barril es $70\,\%x$ y como contiene 30 litros más que cuando está lleno hasta el 30 % se puede formar la ecuación:

  $70\,\%x = 30\,\%x + 30$
  que es equivalente a

  $\dfrac{70}{100}x = \dfrac{30}{100}x + 30$

  $\Longrightarrow 70x = 30x + 3000$

  $\Longrightarrow 40x = 3000$

  $\Longrightarrow x = \dfrac{3000}{40}$

  $\Longrightarrow x = 75$
  Por lo tanto, le caben 75 litros al barril.

6. Sean p, q, r, s y t cinco números reales, tales que la media aritmética (promedio) de p, q y r es ocho y la media aritmética de p, q, r, s y t es siete. Entonces la media aritmética de s y t es

   (a) 5

   (b) 6

   (c) 4,5

   (d) 5,5

- Opción correcta: d
- Solución:

  Se tiene que $\dfrac{p+q+r}{3} = 8$ y $\dfrac{p+q+r+s+t}{5} = 7$

  $\Longrightarrow p+q+r = 24$ y $p+q+r+s+t = 35$

  Sustituyendo la primera escuación en la segunda $24 + s + t = 35$

  $\Longrightarrow s + t = 11$

  Así, el promedio de s y t es $\dfrac{s+t}{2} = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$

7. En cuatro tarjetas están escritos los números 2, 5, 7 y 12 (un número en cada tarjeta). En la parte posterior de cada tarjeta están escritas, respectivamente, las siguientes frases: *Divisible por 7*, *Primo*, *Impar* y *Mayor que 100*. Se sabe que cada número escrito en cada tarjeta **NO CORRESPONDE** con la palabra en la parte posterior de la misma. El número que está escrito en la tarjeta con la frase *Mayor que 100* es

   (a) 2

   (b) 5

   (c) 7

   (d) 12

- Opción correcta: c
- Solución:

  El número 12 corresponde a la tarjeta *Primo*, pues es el único que no lo es.

  Esto implica que 2 corresponde a la tarjeta *Impar*, pues los restantes, 5 y 7, ambos son impares, y por lo tanto, 5 corresponde a la tarjeta *Divisible por 7*.

  Dado que 7 es el único número restante, éste correspondería a la tarjeta *Mayor que 100*

8. La diferencia de las dimensiones b y h de un rectángulo (con $b > h$) es igual a la medida del lado de un triángulo equilátero. Si el triángulo y el rectángulo tienen el mismo perímetro, entonces el valor numérico de $\dfrac{b}{h}$ es

   (a) $\dfrac{1}{5}$

   (b) $\dfrac{1}{2}$

   (c) 2

   (d) 5

- Opción correcta: d
- Solución:

  Denote x: medida del lado del triángulo equilátero. La diferencia de las dimensiones b y h de un rectángulo (con $b > h$) es igual a la medida del lado de un triángulo equilátero, por lo que $x = b - h$. El triángulo y el rectángulo tienen el mismo perímetro, por lo que $3x = 2b + 2h$. Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales para b y h, $h = \dfrac{x}{4}$ y $b = \dfrac{5x}{4}$. Finalmente, $\dfrac{b}{h} = 5$.

9. Si a y b son números reales, tales que $a+b=2$, entonces la solución de la ecuación $ax-x-a+1=b+2-bx$ es

   (a) 1

   (b) 3

   (c) a

   (d) $a+b$

- Opción correcta: b
- Solución:

$$\begin{aligned} ax-x-a+1=b+2-bx &\Leftrightarrow ax+bx-x=a+b+1 \\ &\Leftrightarrow (a+b-1)x=a+b+1 \\ &\Leftrightarrow x=3 \end{aligned}$$

10. Juan estaba caminando con rapidez constante por una avenida en Heredia cuando vio un camión que estaba transportando una pieza grande de madera (también se desplazaba con una rapidez constante).
Juan quería medir el largo de la pieza de madera, entonces decidió caminar a lo largo de la pieza de madera en dirección contraria al camión y contó 10 pasos, mientras que cuando caminó a lo largo de la pieza de madera en dirección del camión contó 70 pasos.
Si se sabe que cada paso de Juan mide un metro, entonces la longitud en metros de la pieza de madera es

    (a) 30

    (b) 35

    (c) 17,5

    (d) 30,5

- Opción correcta: c
- Solución:
Asumiendo que la velocidad a la que camina Juan es constante, y como $velocidad = \dfrac{distancia}{tiempo}$, sean x_1 y x_2 los tiempos que dura en recorrer Juan la pieza de madera en dirección contraria y en la misma dirección del camión respectivamente. Así, $\dfrac{10}{x_1} = \dfrac{70}{x_2}$, de donde $x_2 = 7x_1$.
Por otro lado, sea l la longitud de la pieza de madera y como se asume también que la velocidad del camión es constante, entonces $\dfrac{(l-10)}{x_1} = \dfrac{(70-l)}{x_2}$, de donde $l = 17{,}5$ metros.

11. Sean a, b, c y d dígitos. Denotamos $abcd$ al número cuyos dígitos son a, b, c y d, respectivamente. La cantidad de números de cuatro dígitos, tales que $abcd = bac + cbd$ es

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) 3

- Opción correcta: a

- Solución:

$$\begin{aligned} abcd = bac + cbd \quad &\Rightarrow \quad 1000a + 100b + 10c + d = 100b + 10a + c + 100c + 10b + d \\ &\Rightarrow \quad 990a = 91c + 10b \end{aligned}$$

Sin embargo, como $1 \leq a \leq 9$, pues de lo contrario el número no sería de cuatro dígitos, entonces $990 \leq 990a \leq 8910$ mientras que $0 \leq 91c + 10b \leq 909$, pues el valor mayor se alcanza cuando $c = 9$ y $b = 9$. De modo que es imposible que se cumpla la igualdad.

12. Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, con $m\angle ABC = 90°$. Sean E y F puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, y sea G un punto tal que $B-G-C$. Si el área del $\triangle ABC$ es 24 cm^2, entonces el área en cm^2 del $\triangle EFG$ es

    (a) 3

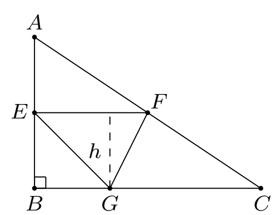
    (b) 6

    (c) 9

    (d) 12

- Opción correcta: b
- Solución:

  Considere al figura



$\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ por ser una paralela media, entonces $h = \dfrac{AB}{2}$ y además $EF = \dfrac{BC}{2}$, así tenemos que:

$$(EFG) = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{(ABC)}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

13. En la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}=(a-1)\sqrt{x}$$

si $a>1$, entonces su solución es

(a) a^2-1

(b) $1-a^2$

(c) $\dfrac{3}{a^2-1}$

(d) $\dfrac{3}{1-a^2}$

- Opción correcta: c
- Solución:

Como

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

entonces

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$$

luego

$$\begin{aligned}\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=(a-1)\sqrt{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+3}=a\sqrt{x}\\ &\Leftrightarrow \quad x+3=a^2x\\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{3}{a^2-1}\end{aligned}$$

14. En un Centro de Entrenamiento Deportivo hay dos equipos de atletismo, uno practica carreras y el otro saltos. De un total de 105 deportistas que entrenan en el Centro, 83 pertenecen al equipo de carreras, 39 al de saltos y 27 a ambos. Si se elige al azar uno de los deportistas que pertenecen a algún quipo de atletismo para que represente al Centro de Entrenamiento en una competencia, entonces la probabilidad de que sea integrante del equipo de carreras pero no del de salto es

    (a) $\dfrac{44}{95}$

    (b) $\dfrac{56}{95}$

    (c) $\dfrac{44}{105}$

    (d) $\dfrac{56}{105}$

- Opción correcta: b

- Solución:

  83 deportistas pertenecen al equipo de carreras, 39 al de saltos y 27 a ambos, por lo que $83-27 = 56$ practican solamente carreras, $39 - 27 = 12$ practican solamente saltos y 27 practican ambos.

  Luego, $56 + 12 + 27 = 95$ pertenecen a algún equipo de atletismo.

  Si se elige, al azar, uno de los depostistas que entrenan atletismo, para que represente al centro de entrenamiento en una competencia, entonces la probabilidad de que sea integrante del equipo de carreras pero no del de salto, es $\dfrac{56}{95}$.

15. El número entero $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ **no** es múltiplo de cinco si n es

    (a) 2016

    (b) 2017

    (c) 2018

    (d) 2019

- Opción correcta: a

- Solución:

  Para que sea múltiplo de 5, el último dígito debe ser 0 o 5. Consideremos los últimos dígitos de las potencias según el siguiente cuadro.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
1^n	1	1	1	1	1	1	1	1
2^n	2	4	8	6	2	4	8	6
3^n	3	9	7	1	3	9	7	1
4^n	4	6	4	6	4	6	4	6
$+$	0	0	0	4	0	0	0	4

  Para que la suma no sea múltiplo de 5, n debe ser múltiplo de 4 y de las opciones cumple 2016.

16. En un paralelogramo $\square ABCD$ se tiene que $m\angle ABC = 120°$ y $2AB = BC$. Si M es el punto medio de $\overline{BC}$ y $MA = 7\sqrt{3}$, entonces la medida del lado mayor del paralelogramo es

   (a) 7

   (b) 14

   (c) $\sqrt{3}$

   (d) $7\sqrt{3}$

- Opción correcta: b
- Solución:

  Denote x: medida del lado menor del paralelogramo.

  Es decir, $AB = DC = x$. $2AB = BC$, por lo que $BC = AD = 2x$. M es el punto medio de $\overline{BC}$, por lo que $BM = MC = x$. $m\angle ABC = 120^o$, por lo que $m\angle BCD = 60^o$.

  Entonces, el $\triangle MCD$ es equilátero, $MD = x$ y $m\angle DMC = 60^o$. Por otra parte, el $\triangle ABM$ es isósceles y $m\angle AMB = 30^o$. $m\angle AMD = 180^o - m\angle AMB - m\angle DMC = 180^o - 30^o - 60^o = 90^o$.

  Finalmente, el $\triangle AMD$ es rectángulo en M, aplicando el Teorema de Pitágoras $(2x)^2 - x^2 = (7\sqrt{3})^2$, $x = 7$ y el lado mayor del paralelogramo mide $2x = 14$.

17. Seis pueblos A, B, C, D, E y F se encuentran a lo largo de una carretera. Las distancias en kilómetros entre ellos se muestra en el cuadro adjunto. Un orden correcto en el que se encuentran los pueblos a lo largo de la carretera es

    (a) $BADEFC$

    (b) $CEFDAB$

    (c) $CEFADB$

    (d) $FCEDAB$

	A	B	C	D	E	F
A	0	2	20	3	15	8
B	2	0	22	5	17	10
C	20	22	0	17	5	12
D	3	5	17	0	12	5
E	15	17	5	12	0	7
F	8	10	12	5	7	0

- Opción correcta: b
- Solución:

  Del cuadro podemos observar que la distancia más grande está entre C y B por lo que todos los demás puntos deben estar entre ellos.

  A continuación se procede a ordenar los demás pueblos desde el más lejano a C hasta el más cercano.

  Con esto obtenemos que el orden es $CEFDAB$ o $BADFEC$, donde la primera es la que aparece entre las opciones.

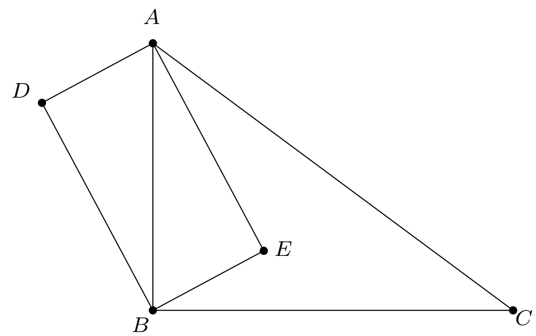
18. En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $m\angle ABC = 90°$; además, $\overline{AB}$ es diagonal del rectángulo $\square ADBE$. Si $BC = 5\sqrt{2}$, $BE = 3$ y $AC = 5\sqrt{3}$, entonces el área del $\square ADBE$ es

(a) 5

(b) 6

(c) 12

(d) 14



- Opción correcta: c
- Solución:

Utilizando el teorema de Pitágoras en el $\triangle ABC$, se tiene:

$$\begin{aligned} & AB^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 \\ \Rightarrow\ & AB^2 = 25 \cdot 3 - 25 \cdot 2 = 25 \\ \Rightarrow\ & AB = 5 \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras en el $\triangle ABE$, se tiene:

$$\begin{aligned} & AE^2 + 3^2 = 5^2 \\ \Rightarrow\ & AE^2 = 25 - 9 = 16 \\ \Rightarrow\ & AE = 4 \end{aligned}$$

Luego, $(ADBE) = 3 \cdot 4 = 12$.

19. Un número entero positivo múltiplo de cinco es tal que si se divide entre tres el residuo es uno y si se divide entre siete el residuo es dos. La suma de las cifras del menor número que cumple con las condiciones es

    (a) 1

    (b) 4

    (c) 7

    (d) 8

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Por el algoritmo de la división el número es de la forma $3a+1$, $7b+2$ y $5c$ con a, b, c enteros.

  Observe que si sumamos cinco unidades al número, el número es múltiplo de 3,7 y 5, ya que $3a+6=3(a+2)$, $7b+7=7(b+1)$ y $5c+5=5(c+1)$.

  Si n es el número, como el mínimo común múltiplo de 3,7 y 5 es 105, entonces $n+5=105k$ y el menor que lo cumple es 105.

  Así, $n=100$ y la suma de sus cifras es 1.

20. Se van a repartir 100 cartas en grupos de 7, 5 y 3 cartas, respectivamente. Si se sabe que hay al menos un grupo de 7 cartas, uno de 5 cartas y uno de 3 cartas, entonces la mínima cantidad de grupos que hay para que las 100 cartas sean repartidas es

    (a) 15

    (b) 16

    (c) 17

    (d) 18

- Opción correcta: *b*
- Solución:

  Si $x+1$, $y+1$, $z+1$ son la cantidad de grupos de 7, 5, y 3 cartas respectivamente, entonces $7x+5y+3z=85$, con x,y,z mayores o iguales a cero.

  Veamos que la menor cantidad de grupos posibles se consigue haciendo la mayor cantidad de grupos de 7 cartas posibles.

  Si se hacen 12 grupos de 7 cartas, entonces $5y+3z=1$, lo cual no es posible. Si $z=11$ entonces $5y+3z=8$, que se logra si $y=z=1$.

  Por lo que la menor cantidad de grupos es $x+1+y+1+z+1=12+2+2=16$.

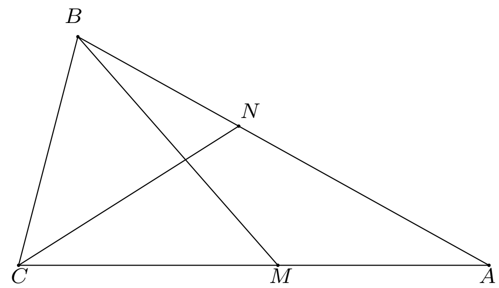
21. En la figura adjunta se tiene que $m\angle BCN = 6x$, $m\angle CBM = 5x$, $m\angle CMB = 5x$, $m\angle BNC = 4x$ y $m\angle BAC = 2x$. La medida del $\angle ABM$ es

(a) $20°$

(b) $30°$

(c) $40°$

(d) $60°$



- Opción correcta: b
- Solución:

Sean $m\angle ABM = b$ y $m\angle ACN = a$
Por suma de ángulos internos del $\triangle BCN$ tenemos $15x + b = 180$. (1)
Por suma de ángulos internos del $\triangle CMB$ tenemos $16x + a = 180$.
Igualando ambas ecuaciones tenemos $15x+b = 16x+a \Longrightarrow b-x = a$ Ahora por suma de ángulos internos del $\triangle ABC$ tenemos:

$$13x + a + b = 180 \Rightarrow 13x + b - x + b = 180 \Rightarrow 12x + 2b = 180 \Rightarrow 6x + b = 90 \Rightarrow b = 90 - 6x$$

Ahora sustituyendo en (1) tenemos $15x + 90 - 6x = 180 \Rightarrow 9x = 90 \Rightarrow x = 10$ y así $b = 30$. $\therefore m\angle ABM = 30$.

22. La negación del enunciado: *"Cada estudiante compró más de 10 manzanas"* es

    (a) Ningún estudiante compró más de 10 manzanas.

    (b) Algún estudiante compró más de 10 manzanas.

    (c) Algún estudiante compró menos de 11 manzanas.

    (d) Cada estudiante compró menos de 11 manzanas.

- Opción correcta: c
- Solución:

  Decir que no fue cierto que todos hicieron algo, es porque alguien no lo hizo.

  En este caso, alguien no compró más de 10 manzanas, por lo que tuvo que haber comprado 10 o menos.

  Es decir, alguno compró menos de 11 manzanas.

23. Suponga que los números reales x y y satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3^x - 3^y &= 16 \\ 9^x - 9^y &= 320 \end{cases}$$

El valor de $x - y$ es

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

- Opción correcta: b
- Solución:

Sea $a = 3^x$ y $b = 3^y$ entonces la primera ecuación corresponde a $a - b = 16$ mientras que la segunda ecuación equivale a $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 320$ es decir $16(a+b) = 320$ o $a + b = 20$, entonces el sistema original es equivalente a $\begin{cases} a - b &= 16 \\ a + b &= 20 \end{cases}$. Cuya solución es $a = 18$ y $b = 2$.

Es decir, $3^x = 18 = 2 \times 9 = 3^y \times 9 = 3^{y+2}$, por tanto $x = y + 2$ y finalmente $x - y = 2$.

Otra alternativa es que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3^x}{3^y} = \dfrac{18}{2}$ es decir $3^{x-y} = 9 = 3^2$ por tanto $x - y = 2$

24. La cantidad de números naturales n menores que 1000 que cumplen $n = 17s + (d-3)^2 + 2$, donde s es la suma de las cifras de n, y d es la cifra de las decenas es

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

   (d) 3

- Opción correcta: c
- Solución:

  Sea $n = 100a + 10b + c$ por tanto $100a + 10b + c = 17(a+b+c) + (b-3)^2 + 2$ de donde se tiene: $83a = b(b+1) + 16c + 11$, note que el lado derecho de la expresión es impar (ya que b(b+1) es par), por tanto a tiene que ser impar.

  Por otro lado, $a < 3$ ya que el lado derecho no supera $9\times 10 + 16\times 9 + 11 = 245$ y $83 \times 3 = 249$, con lo cual $a = 1$, lo que significa que $83 = b(b+1) + 16c + 11$, simplificando tenemos $9 = \dfrac{b(b+1)}{8} + 2c$.

  Con ello si $b = 7$ entonces $c = 0$, si $b = 8$, $c = 1$.

  Los números son 180 y 171.

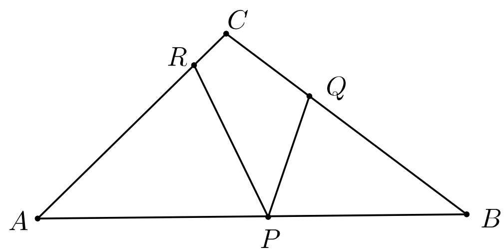
25. En la figura adjunta, se tiene que $\overline{AC} \perp \overline{BC}$, $BQ = BP$ y $AR = AP$. La medida del $\angle RPQ$ es

(a) 30°

(b) 45°

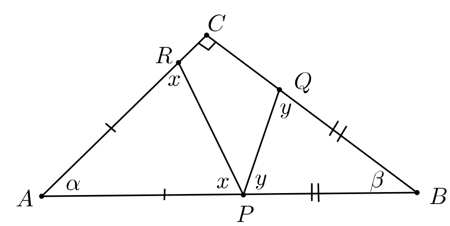
(c) 90°

(d) 135°



- Opción correcta: b

- Solución:
De acuerdo con la información dada, se tiene la figura adjunta.
Donde $m\angle ACB = 90°$, pues $\overline{AC} \perp \overline{BC}$. Donde la $m\angle\alpha + m\angle\beta + m\angle ACB = 180° \Rightarrow m\angle\alpha + m\angle\beta = 90°$ (1), esto por el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.
Además, se tiene que $BQ = BP$, por la clasificación de triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos internos y con la medida de sus lados se tiene que el triángulo $\triangle BPQ$ es isósceles, entonces los ángulos $\angle BPQ = \angle PQP = y$. Entonces $m\angle\beta = 180° - 2m\angle y$ (2).



Por otro lado se tiene que: $AP = AR$, por la clasificación de triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos internos y con la medida de sus lados se tiene que el triángulo $\triangle APR$ es isósceles entonces $\angle APR = \angle ARP = x$. Entonces $m\angle\alpha = 180° - 2m\angle x$ (3).

Luego se sustituye (2) y (3) en (1), se tiene: $180° - 2m\angle x + 180° - 2m\angle y = 90° \Rightarrow m\angle x + m\angle y = 135°$. Por último, se tiene que: $m\angle RPQ = 180° - m\angle x - m\angle y \Rightarrow m\angle RPQ = 45°$.