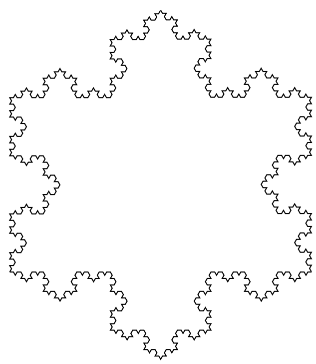
XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

PRIMERA ELIMINATORIA



Nivel II

$(8^\circ - 9^\circ)$

2020

Estimado estudiante:

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del XXX, en la siguiente dirección electrónica: **www.olcoma.com**

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2020 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. Si a y b son dígitos, entonces la cantidad de números de la forma $2a2b$ que son divisibles por 30 corresponde a
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 10

2. En un refugio silvestre llevan animales que se le han decomisado a personas inescrupulosas que buscaban llevárselos fuera de sus hábitats para exhibiciones, ventas ilegales o para mantenerlos en cautiverio en lugares no apropiados. Si en este refugio se tienen aisladas seis lapas rojas, siete yigüirros, cinco quetzales, tres lapas verdes y cuatro tucanes para su pronta liberación, y se realiza la liberación de una de estas aves por semana al azar, la probabilidad de que en esta semana sea liberada una lapa corresponde a
   (a) $\frac{9}{25}$
   (b) $\frac{18}{25}$
   (c) $\frac{6}{25}$
   (d) $\frac{3}{25}$

3. En una finca se cosechan naranjas y limones. Por cada 50 naranjas cosechadas, hay 30 limones. Si la cosecha fue de 33 600 frutas y 20 % no es exportable, entonces la cantidad de naranjas que son de exportación es
   (a) 2 520
   (b) 4 200
   (c) 10 080
   (d) 16 800

4. El siguiente número en la secuencia: $1, 1, 2, -1, 1, -2, -1,$ _ corresponde a
   (a) -1
   (b) -2
   (c) -3
   (d) 1

5. Carlos dibuja un cuadrado grande de n cm de lado y lo divide en n^2 cuadrados pequeños del mismo tamaño, luego pinta de verde todos cuadrados pequeños que forman una de las diagonales del cuadrado grande, y de rojo todos los cuadrados pequeños que están por debajo de esta diagonal, finalmente se da cuenta que le faltan por colorear 153 cuadrados pequeños. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?
   (a) 289
   (b) 324
   (c) 361
   (d) 400

6. Cristina debe inyectarse un medicamento durante 150 días, el doctor dio la instrucción de inyectarse 3 días seguidos y descansar 1 día. Empieza inyectándose un jueves. ¿Cuántas veces, en los 150 días, se inyectará durante jueves, viernes y sábado, seguidos?
   (a) 8
   (b) 7
   (c) 6
   (d) 5

7. El resultado de la operación $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + \cdots + 239$ corresponde a
   (a) 3 160
   (b) 3 162
   (c) 9 482
   (d) 9 638

8. Considere un triángulo rectángulo ABC y un punto D tales que $\overline{AB} \perp \overline{BC}, B - D - C, AB = 4, BC = 10$ y $AD = 5$. El área del triángulo ACD corresponde a
   (a) 7
   (b) 14
   (c) 21
   (d) 25

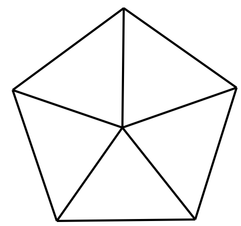
9. En la figura adjunta se tiene un pentágono regular que está dividido en cinco partes congruentes. Considere que cada parte se puede colorear de negro o dejarse en blanco. Debe considerar que dos coloraciones son iguales si se puede obtener una a partir de otra por un giro. Según la información anterior, la cantidad posible de coloraciones distintas corresponde a

   (a) 6

   (b) 7

   (c) 8

   (d) 9



10. Eduardo tiene confites de menta y chocolates para comer mientras hace el examen de OLCOMA. Inicialmente, la cantidad de confites de menta es el doble que la de chocolates. Al finalizar la prueba, se da cuenta que se comió diez de cada uno, y que la cantidad de confites de menta es el triple que la de chocolates. Entonces la cantidad de chocolates que tenía al inicio es

   (a) 10

   (b) 20

   (c) 30

   (d) 40

11. Para un número entero llamaremos un *reordenamiento* a un número que tenga los mismos dígitos pero en otro orden. Por ejemplo, 2002 es un reordenamiento de 2020.
¿Cuántos números naturales A de 3 dígitos cumplen la siguiente condición?
Existe al menos un primo p impar menor que 10 que divide a A tal que p divide a cualquier reordenamiento de A.

   (a) 299

   (b) 300

   (c) 303

   (d) 306

12. En el triángulo $\triangle ABC$ el punto R es el pie de la altura desde C. P y Q son puntos de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, respectivamente, tales que $\overline{QP} \perp \overline{CR}$. S es el punto de intersección de $\overline{CR}$ con $\overline{PQ}$ y el área del $\triangle CSQ$ es la mitad del área del $\triangle CRQ$. Las alturas desde S de los triángulos $\triangle CSQ$ y $\triangle RSQ$ son $\overline{SM}$ y $\overline{SN}$ respectivamente y $SM = SN$. Se tiene que el $\angle ABC$ es $5°$ menor que la mitad de la medida del $\angle A$ y, además, el $m\angle ACB = 80°$. Determine la medida de $\angle CRQ$.

   (a) $30°$

   (b) $60°$

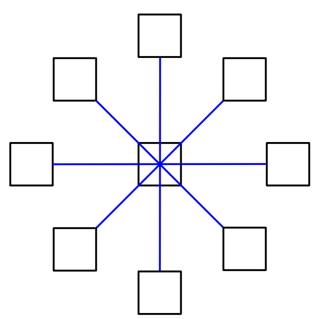
   (c) $70°$

   (d) $80°$

13. Si a y b son dígitos, entonces la cantidad de números de 5 dígitos de la forma $61a4b$ que son divisibles por 3, 4 y 5 es igual a
    (a) 1
    (b) 2
    (c) 3
    (d) 4

14. Los vértices de un cuadrado $\square ABCD$ están sobre una misma circunferencia C. Si se sabe que el área del $\square ABCD$ es $45\pi^2 cm^2$, entonces el perímetro de la circunferencia C, en cm, correspode a
    (a) $3\pi^2\sqrt{10}$
    (b) $3\pi\sqrt{10}$
    (c) $3\pi^2\sqrt{5}$
    (d) $12\pi\sqrt{5}$

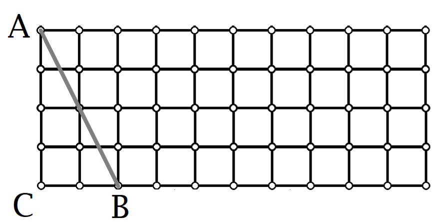
15. Cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 son escritos una sola vez en cada uno de los nueve cuadrados de la figura adjunta, de manera que se obtienen sumas iguales a lo largo de cada una de las cuatro líneas. Si x representa la suma en cada una de las líneas, con certeza se puede asegurar que x es siempre múltiplo de
    (a) 3
    (b) 2
    (c) 5
    (d) 9

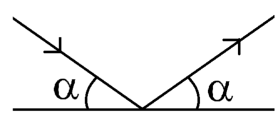


16. Considere seis puntos colineales $A - B - C - D - E - F$ tales que $\overline{AC}$ es diámetro de la circunferencia de centro B, $\overline{CE}$ es diámetro de la circunferencia de centro D, $\overline{EF}$ es radio de la circunferencia de centro F, $BD = 2AC$ y $DF = 2CE$. La razón del área de la circunferencia menor entre la circunferencia mayor es
    (a) $\dfrac{1}{4}$
    (b) $\dfrac{1}{64}$
    (c) $\dfrac{1}{81}$
    (d) $\dfrac{1}{256}$

17. Matías, Emanuel y Paola deben, en conjunto, realizar un trabajo. Matías completaría el trabajo de manera individual en 3 horas, Paola lo completaría en 80 minutos y Emanuel lo haría en 6 horas. Los tres inician el trabajo, pero transcurridos 16 minutos Paola debe retirarse, por lo que Matías y Emanuel deben terminar el trabajo. ¿En cuánto tiempo se completó todo el trabajo?
    (a) 1 hora y 20 minutos
    (b) 1 hora y 36 minutos
    (c) 2 horas y 5 minuto
    (d) 2 horas y 7 minutos

18. Considere una mesa de billar de dimensiones $4 \times n$ (en la figura se indica una de 4×10). Una bola se lanza en línea recta desde el punto A hacia el punto B, reflejándose en los bordes con el mismo ángulo (como se indica en la figura), hasta detener su recorrido al llegar de nuevo a una esquina de la mesa. Si al final del recorrido la bola termina en el punto C, entonces un valor posible para n es:
    (a) 2020
    (b) 2021
    (c) 2022
    (d) 2024





19. En un torneo participan tres jugadores Ana, Bryan y Camila. Se desarrollan tres partidas, en cada una de ellas, si hay un ganador, este obtiene dos puntos, si hay un empate obtienen 1 punto cada uno de los dos jugadores que se enfrentaban. Gana el jugador que obtenga más puntos que los demás participantes. Las partidas se desarrollan en el siguiente orden: Ana versus Bryan, luego Bryan versus Camila y finalmente Ana versus Camila. ¿De cuántas maneras distintas se pueden presentar los resultados de los partidos para que Ana sea la ganadora del torneo?
    (a) 6
    (b) 7
    (c) 8
    (d) 9

20. Se tiene una caja de base rectangular que tiene 600 000 cm^3 de volumen, la llamaremos **caja 1**. Se necesita construir una segunda caja de la siguiente manera:

- A la arista de mayor longitud de la caja 1 se le corta $\frac{1}{5}$ de su tamaño y con el mayor de los segmentos se forma una de las aristas de la caja 2.
- A la arista de menor longitud de la caja 1 se le agrega la mitad de su tamaño para formar otra de las aristas de la caja 2.
- La arista de longitud intermedia de la caja 1 se quintuplica para formar la otra arista de la caja 2.

El volumen de la caja 2, en m^3, es

(a) 3,6

(b) 4,3

(c) 8

(d) 9,6