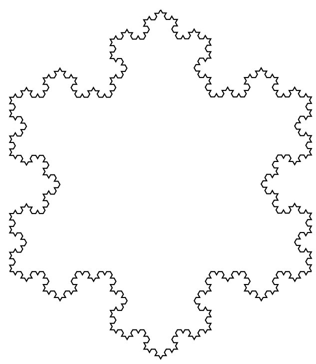
XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
PRIMERA ELIMINATORIA



Nivel II

($8^\circ - 9^\circ$)

2020

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2020 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del XXX, en la siguiente dirección electrónica: **www.olcoma.com**

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\|$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. Si a y b son dígitos, entonces la cantidad de números de la forma $2a2b$ que son divisibles por 30 corresponde a
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 10

- Opción correcta: (c)
- Solución: Al realizar la descomposición prima de 30 se tiene que $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, por lo cual $2a2b$ debe ser divisble por 2, 3 y 5. Particularmente por 10, así el número tiene la forma $2a20$. Ahora, debe cumplir divisibilidad por 3, por lo cual $2 + a + 2 + 0 = 3k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Los valores que puede tomar a son 2, 5 y 8. Así, los números que cumplen la condición son 2220, 2520 y 2820.

2. En un refugio silvestre llevan animales que se le han decomisado a personas inescrupulosas que buscaban llevárselos fuera de sus hábitats para exhibiciones, ventas ilegales o para mantenerlos en cautiverio en lugares no apropiados. Si en este refugio se tienen aisladas seis lapas rojas, siete yigüirros, cinco quetzales, tres lapas verdes y cuatro tucanes para su pronta liberación, y se realiza la liberación de una de estas aves por semana al azar, la probabilidad de que en esta semana sea liberada una lapa corresponde a
   (a) $\frac{9}{25}$
   (b) $\frac{18}{25}$
   (c) $\frac{6}{25}$
   (d) $\frac{3}{25}$

- Opción correcta: (a)
- Solución: El total de aves es $6 + 7 + 5 + 3 + 4 = 25$ y la cantidad de lapas es $6 + 3 = 9$. Así, la probabilidad de liberar una lapa es $\frac{9}{25}$.

3. En una finca se cosechan naranjas y limones. Por cada 50 naranjas cosechadas, hay 30 limones. Si la cosecha fue de 33 600 frutas y 20 % no es exportable, entonces la cantidad de naranjas que son de exportación es
   (a) 2 520
   (b) 4 200
   (c) 10 080
   (d) 16 800

- Opción correcta: (d)

- Solución: Si por cada 50 naranjas hay 30 limones entonces hay 80 frutas. Luego $\frac{33\,600}{80} = 420$ y por lo tanto la cantidad de naranjas es $50 \cdot 420 = 21\,000$ y $30 \cdot 420 = 12\,600$ limones. Luego, si el 20 % no es de exportación entonces el 80 % sí lo es. De esta forma la cantidad de naranjas de exportación es $21\,000 \cdot \frac{80}{100} = 16\,800$

4. El siguiente número en la secuencia: $1, 1, 2, -1, 1, -2, -1,$ _ corresponde a
   (a) -1
   (b) -2
   (c) -3
   (d) 1

- Opción correcta: (a)

- Solución: Se puede notar el siguiente patrón:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & + & 1 & = & 2 \\ 1 & - & 2 & = & -1 \\ 2 & + & -1 & = & 1 \\ -1 & - & 1 & = & -2 \\ 1 & + & -2 & = & -1 \\ -2 & - & -1 & = & -1 \end{array}$$

A partir del segundo elemento, el siguente se obtiene sumando o restando, alternadamente, los dos anteriores. Si se denota a_n el elemento n-esimo de la secuencia, vemos que $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_2 - a_3$, $a_5 = a_3 + a_4$, $a_6 = a_4 - a_5$, luego, el término siguente es, $a_8 = a_6 - a_7 = -2 - -1 = -1$

5. Carlos dibuja un cuadrado grande de n cm de lado y lo divide en n^2 cuadrados pequeños del mismo tamaño, luego pinta de verde todos cuadrados pequeños que forman una de las diagonales del cuadrado grande, y de rojo todos los cuadrados pequeños que están por debajo de esta diagonal, finalmente se da cuenta que le faltan por colorear 153 cuadrados pequeños. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?
   (a) 289
   (b) 324
   (c) 361
   (d) 400

- Opción correcta: (b)

- Solución: Del total de cuadrados pequeños n^2, n (los de la diagonal) están pintados de verde, quiere decir que faltan $\frac{n^2 - n}{2} = 153$, que corresponde a $n^2 - n - 306 = 0$ que se factoriza $(n - 18)(n + 17) = 0$ con lo cual $n = 18$ (la solución negativa no) por lo tanto el área será $A = n^2 = 18^2 = 324$

6. Cristina debe inyectarse un medicamento durante 150 días, el doctor dio la instrucción de inyectarse 3 días seguidos y descansar 1 día. Empieza inyectándose un jueves. ¿Cuántas veces, en los 150 días, se inyectará durante jueves, viernes y sábado, seguidos?
   (a) 8

   (b) 7

   (c) 6

   (d) 5

- Opción correcta: (c)
- Solución: Cuando Cristina se inyecta el medicamento jueves, viernes y sábado, descansa el domingo. Los domingos ocurren cada 7 días, y Cristina descansa de la inyección cada 4 días. Eso significa que cada $mcm(4,7) = 28$ días Cristina descansa un domingo. Si empezamos a contar a partir del primer lunes (para contar semanas completas) nos restan 146 días. Dado que $146 = 28 \cdot 5 + 6$. Cristina se inyecta el medicamento jueves, viernes y sábado consecutivos durante 5 veces más. Eso significa un total de 6 veces.

7. El resultado de la operación $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + \cdots + 239$ corresponde a
   (a) 3 160

   (b) 3 162

   (c) 9 482

   (d) 9 638

- Opción correcta: (d)
- Solución: Se puede notar el siguiente patrón:

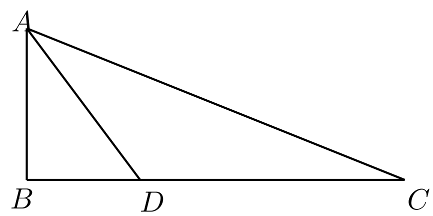
$$
\begin{gathered}
5 = 2 + 3 \cdot 1 \\
8 = 2 + 3 \cdot 2 \\
11 = 2 + 3 \cdot 3 \\
14 = 2 + 3 \cdot 4 \\
17 = 2 + 3 \cdot 5 \\
20 = 2 + 3 \cdot 6 \\
\vdots \\
239 = 2 + 3 \cdot 79
\end{gathered}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + \cdots + 239 &= 2 \cdot 79 + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + 79) \\
&= 2 \cdot 79 + 3(79 \cdot 40) = 9\,638
\end{aligned}
$$

8. Considere un triángulo rectángulo ABC y un punto D tales que $\overline{AB} \perp \overline{BC}, B - D - C, AB = 4, BC = 10$ y $AD = 5$. El área del triángulo ACD corresponde a
   (a) 7
   (b) 14
   (c) 21
   (d) 25

- Opción correcta: (b)
- Solución: Según la información anterior se tiene la siguente figura:

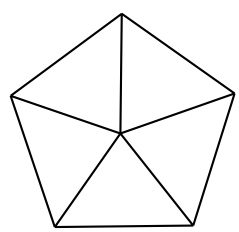


Se tiene que $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, entonces el $\triangle ABD$ es rectángulo. Además $AB = 4$ y $AD = 5$, entonces por Teorema de Pitágoras se obtiene que $BD = 3$.

Por otro lado, $(ABD) = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$ y $(ABC) = \dfrac{10 \cdot 4}{2} = 20$.

Se puede observar que: $(ACD) = (ABC) - (ABD) = 20 - 6 = 14$

9. En la figura adjunta se tiene un pentágono regular que está dividido en cinco partes congruentes. Considere que cada parte se puede colorear de negro o dejarse en blanco. Debe considerar que dos coloraciones son iguales si se puede obtener una a partir de otra por un giro. Según la información anterior, la cantidad posible de coloraciones distintas corresponde a
   (a) 6
   (b) 7
   (c) 8
   (d) 9



- Opción correcta: (c)
- Solución: Una coloración corresponde a dejar todos los triángulos en blanco. Si solo se colorea un triángulo hay una sola coloración posible. Hay dos coloraciones posibles, si se colorean dos triángulos, es decir; dos triángulos negros juntos y dos triángulos negros con uno blanco en medio. Por simetría hay dos coloraciones con tres triángulos coloreados. Hay una coloración posible si se colorean cuatro triángulos. Por último, hay una sola coloración si se colorean todos los triángulos. Por lo tanto, hay ocho coloraciones distintas.

10. Eduardo tiene confites de menta y chocolates para comer mientras hace el examen de OLCOMA. Inicialmente, la cantidad de confites de menta es el doble que la de chocolates. Al finalizar la prueba, se da cuenta que se comió diez de cada uno, y que la cantidad de confites de menta es el triple que la de chocolates. Entonces la cantidad de chocolates que tenía al inicio es
    (a) 10
    (b) 20
    (c) 30
    (d) 40

- Opción correcta: (b)
- Solución: Sean x la cantidad de confites de menta, y y la cantidad de chocolates que Eduardo tiene al inicio. Entonces se tiene que

$$\begin{cases} x = 2y \\ x - 10 = 3(y - 10) \end{cases}$$

sustituyendo x de la primera en la segunda se obtiene que $2y - 10 = 3y - 30$, es decir, $y = 20$, por lo que la respuesta correcta es la (b).

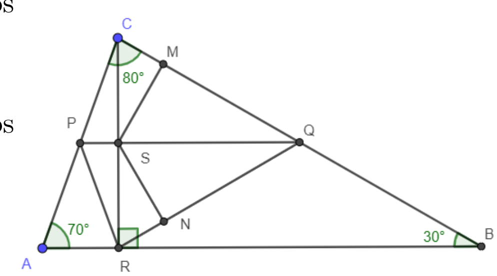
11. Para un número entero llamaremos un *reordenamiento* a un número que tenga los mismos dígitos pero en otro orden. Por ejemplo, 2002 es un reordenamiento de 2020.
    ¿Cuántos números naturales A de 3 dígitos cumplen la siguiente condición?
    Existe al menos un primo p impar menor que 10 que divide a A tal que p divide a cualquier reordenamiento de A.
    (a) 299
    (b) 300
    (c) 303
    (d) 306

- Opción correcta: (d)
- Solución: Observemos primero que una posibilidad para el primo es $p = 3$, pues si 3 divide a $A = abc$ entonces a divide a cualquier reordenamiento de A. El mayor número de 3 dígitos que es divisible por 3 es $3 \cdot 333 = 999$ y el menor es $3 \cdot 34 = 102$, por lo que hay $333 - 34 + 1 = 300$ números de 3 dígitos que satisfacen la condición, con $p = 3$.
  Ahora observamos que también existen números A que cumplen la propiedad tomando $p = 5$: $500, 505, 550, 555$. Sin embargo 555 es múltiplo de 3, por lo que ya está considerado en el caso anterior. Además, tomando $p = 7$: $700, 707, 770, 777$. Sin embargo 777 es múltiplo de 3, por lo que ya está considerado en el primer caso. Entonces existen 306 números que cumplen la condición.

12. En el triángulo $\triangle ABC$ el punto R es el pie de la altura desde C. P y Q son puntos de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, respectivamente, tales que $\overline{QP} \perp \overline{CR}$. S es el punto de intersección de $\overline{CR}$ con $\overline{PQ}$ y el área del $\triangle CSQ$ es la mitad del área del $\triangle CRQ$. Las alturas desde S de los triángulos $\triangle CSQ$ y $\triangle RSQ$ son $\overline{SM}$ y $\overline{SN}$ respectivamente y $SM = SN$. Se tiene que el $\angle ABC$ es $5°$ menor que la mitad de la medida del $\angle A$ y, además, el $m\angle ACB = 80°$. Determine la medida de $\angle CRQ$.
   (a) $30°$
   (b) $60°$
   (c) $70°$
   (d) $80°$

- Opción correcta: (b)

- Solución:
Como $(CQS) + (RSQ) = (CRQ)$ y $2(CQS) = (CRQ)$ entonces $(CQS) = (RSQ)$. Además, tomando $\overline{CQ}$ y $\overline{QR}$ como las bases de los triángulos $\triangle SCQ$ y $\triangle RQC$ y dado que las alturas de dichos triángulos son iguales ($SM = SN$) se concluye que $CQ = QR$.
Luego el $\triangle CRQ$ es isósceles y $\angle SCQ \cong \angle SRQ$.
Además $m\angle B = \dfrac{m\angle A}{2} - 5^{o}$ y por suma de ángulos internos $m\angle B + m\angle A = 100°$
$\Rightarrow \dfrac{m\angle A}{2} - 5 + m\angle A = 100°$
$\Rightarrow m\angle A = 70°$ y $m\angle B = 30°$
$\Rightarrow m\angle BCR = 60°$ por suma de ángulos en el triángulo
$\Rightarrow m\angle CRQ = 60°$



13. Si a y b son dígitos, entonces la cantidad de números de 5 dígitos de la forma $61a4b$ que son divisibles por 3, 4 y 5 es igual a
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4

- Opción correcta: (c)

- Solución: Para que el número sea divisible por 5 debe cumplirse que $b = 0$ o $b = 5$. Para que el número sea divisible por 4 debe cumplirse que $4b$ debe ser divisible por 4, por lo que $b = 0$. Por otro lado, para que $61a40$ sea divisible por 3 se debe cumplir que

$$6 + 1 + a + 4 + 0 = 3k$$

donde k es un número entero, es decir, $11 + a = 3k$. Como a es un dígito entonces las opciones son $a = 1, 4, 7$. Por lo tanto, hay 3 posibles números que satisfacen lo pedido.

14. Los vértices de un cuadrado $\square ABCD$ están sobre una misma circunferencia C. Si se sabe que el área del $\square ABCD$ es $45\pi^2 cm^2$, entonces el perímetro de la circunferencia C, en cm, correspode a

    (a) $3\pi^2\sqrt{10}$

    (b) $3\pi\sqrt{10}$

    (c) $3\pi^2\sqrt{5}$

    (d) $12\pi\sqrt{5}$

- Opción correcta: (a)

- Solución: Si x representa la medida de cada uno de los lados del cuadrado, dado que el área del cuadrado es $45\pi^2$, se tiene que $45\pi^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{45\pi^2} = 3\pi\sqrt{5}$.

  La diagonal de este cuadrado representa también el diámetro de la circunferencia C. Por el Teorema de Pitágoras se obtiene que dicho diámetro es $3\pi\sqrt{10}$ y el radio r de C es $r = \dfrac{3\pi\sqrt{10}}{2}$.

  El perímetro p de la circunferencia C es $p = 2\pi \cdot \dfrac{3\pi\sqrt{10}}{2} = 3\pi^2\sqrt{10}$.

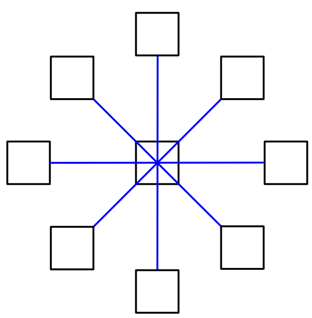
15. Cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 son escritos una sola vez en cada uno de los nueve cuadrados de la figura adjunta, de manera que se obtienen sumas iguales a lo largo de cada una de las cuatro líneas. Si x representa la suma en cada una de las líneas, con certeza se puede asegurar que x es siempre múltiplo de

    (a) 3

    (b) 2

    (c) 5

    (d) 9



- Opción correcta: (a)

- Solución: Sea x la suma que se produce en cada una de las cuatro líneas y sea y el número que se coloca en el cuadrado del centro.

  Dado que $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \dfrac{9\cdot 10}{2} = 45$, se cumple que $4x-3y = 45 \Rightarrow y = \dfrac{4x}{3} - 15$.

  De este resultado, se concluye que x debe ser múltiplo de tres.

  Los posibles valores para la suma x van desde $x = 1+2+3 = 6$ hasta $x = 9+8+7 = 24$. Al evaluar desde 6 hasta 24, los posibles valores que se encuentran para y son $y = 1$, $y = 5$ y $y = 9$, que corresponden con las sumas $x = 12$, $x = 15$ y $x = 18$, respectivamente (todas sumas múltiplo de tres).

16. Considere seis puntos colineales $A - B - C - D - E - F$ tales que $\overline{AC}$ es diámetro de la circunferencia de centro B, $\overline{CE}$ es diámetro de la circunferencia de centro D, $\overline{EF}$ es radio de la circunferencia de centro F, $BD = 2AC$ y $DF = 2CE$. La razón del área de la circunferencia menor entre la circunferencia mayor es

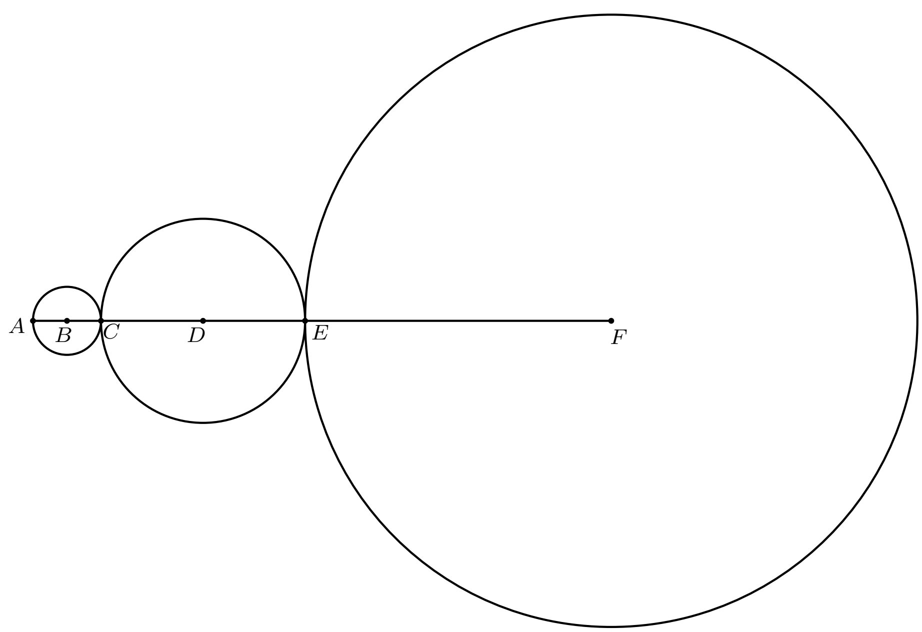
    (a) $\dfrac{1}{4}$

    (b) $\dfrac{1}{64}$

    (c) $\dfrac{1}{81}$

    (d) $\dfrac{1}{256}$

- Opción correcta: (c)
- Solución: De acuerdo con el enunciado se puede construir la siguiente figura:



Tomaremos como unidad el radio la circunferencia menor.
Así $AC = 2$, además el área de dicha circunferencia $A_1 = \pi(1)^2 = \pi$.
Como $BD = 2AC$, entonces $BD = 4$.
Como $AB = BC = 1$, $CD = 3$, por esto el área de la segunda circunferencia es $A_2 = \pi(3)^2 = 9\pi$.
Como $DF = 2CE$, entonces $DF = 12$, pero $DE = 3$ por lo que $EF = 9$, por esto el área de la tercera circunferencia es $A_3 = \pi(9)^2 = 81\pi$.
Por tanto el $\dfrac{A_1}{A_3} = \dfrac{\pi}{81\pi} = \dfrac{1}{81}$.

17. Matías, Emanuel y Paola deben, en conjunto, realizar un trabajo. Matías completaría el trabajo de manera individual en 3 horas, Paola lo completaría en 80 minutos y Emanuel lo haría en 6 horas. Los tres inician el trabajo, pero transcurridos 16 minutos Paola debe retirarse, por lo que Matías y Emanuel deben terminar el trabajo. ¿En cuánto tiempo se completó todo el trabajo?

   (a) 1 hora y 20 minutos

   (b) 1 hora y 36 minutos

   (c) 2 horas y 5 minuto

   (d) 2 horas y 7 minutos

- Opción correcta: (b)

- Solución: Como Matías realiza el trabajo en tres horas, entonces está en capacidad de efectuar $\frac{1}{3}$ del trabajo cada hora.

  Como Paola realiza el trabajo en 80 minutos, entonces está en capacidad de efectuar $\frac{3}{4}$ del trabajo cada hora.

  Como Emanuel realiza el trabajo en 6 horas, entonces está en capacidad de efectuar $\frac{1}{6}$ del trabajo cada hora.

  En conjunto ellos realizan:

  $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$ del trabajo por hora, es decir $\frac{5}{4}$ del trabajo en una hora.

  Pero como solo estuvieron 16 minutos trabajando juntos y esto equivale a $\frac{4}{15}$ de una hora, durante los 16 minutos realizaron $\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{15}=\frac{1}{3}$ del trabajo, por lo que Matías y Emanuel deben completar los $\frac{2}{3}$ del trabajo restante.

  Los dos muchachos en conjunto realizan $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ del trabajo por hora, pero como deben efectuar $\frac{2}{3}$ del trabajo tardarán $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$ de hora, es decir una hora y 20 minutos.

  Esto se puede explicar mejor con regla de tres: $\frac{1\ hora}{\frac{1}{2}\ trabajo}=\frac{x\ horas}{\frac{2}{3}\ trabajo}$

  El total de tiempo invertido para efectuar el trabajo es de 16 min $+1$ hora$+20$ min $=$ 1 hora y 36 minutos.

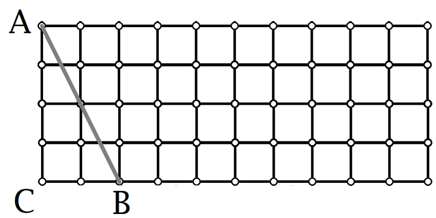
18. Considere una mesa de billar de dimensiones $4 \times n$ (en la figura se indica una de 4×10). Una bola se lanza en línea recta desde el punto A hacia el punto B, reflejándose en los bordes con el mismo ángulo (como se indica en la figura), hasta detener su recorrido al llegar de nuevo a una esquina de la mesa. Si al final del recorrido la bola termina en el punto C, entonces un valor posible para n es:

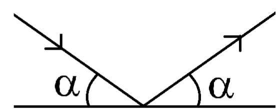
    (a) 2020

    (b) 2021

    (c) 2022

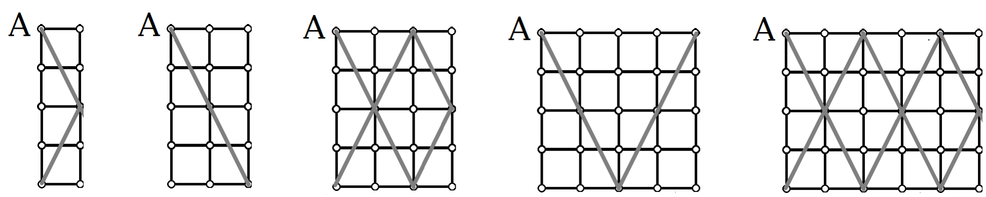
    (d) 2024





- Opción correcta: (b)

- Solución: Hacemos primero unos casos particulares:



Vemos que si $n = 1$, $n = 3$ se cumple lo pedido. Además, el patrón se repite cada cuatro números, pues vemos que en una "submesa" de 4×4 se llega al mismo punto para partir con la misma dirección inicial. Por lo tanto, la bola va a llegar a la esquina C cuando $n = 1, 1+4, 1+2\cdot 4, \ldots$, es decir, $n = 1, 5, 9, \ldots$ y también $n = 3, 3+4, 3+2\cdot 4, \ldots$, es decir, $n = 3, 7, 11, \ldots$ Dicho de otra forma, cuando n sea un número impar. Así una respuesta posible es $2021 = 4 \cdot 505 + 1$.

19. En un torneo participan tres jugadores Ana, Bryan y Camila. Se desarrollan tres partidas, en cada una de ellas, si hay un ganador, este obtiene dos puntos, si hay un empate obtienen 1 punto cada uno de los dos jugadores que se enfrentaban. Gana el jugador que obtenga más puntos que los demás participantes. Las partidas se desarrollan en el siguiente orden: Ana versus Bryan, luego Bryan versus Camila y finalmente Ana versus Camila. ¿De cuántas maneras distintas se pueden presentar los resultados de los partidos para que Ana sea la ganadora del torneo?

    (a) 6

    (b) 7

    (c) 8

    (d) 9

- Opción correcta: (b)

- Solución: Para referirnos a los participantes usaremos la inicial del nombre.
  Para la primera partida tenemos tres posibilidades, que A obtenga 2 puntos, que A y B obtengan 1 punto cada uno o que B obtenga 2 puntos.
  De forma semejante para la segunda y tercera partida.
  Así tenemos $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ formas distintas en las que se puede desarrollar el torneo.
  Denotaremos los puntajes en las partidas con tripletas compuestas por el puntaje final del A, luego el puntaje final de B y posteriormente el puntaje final de C. (punta final de A, puntaje final de B, puntaje final de C).
  Además, note que en total en el torneo se aginarán 6 puntos, por lo que la suma de las entradas de la tripleta siempre debe dar 6. Por su parte, nunca un participante puede obtener 5 o 6 puntos pues un jugador puede ganar como máximo 4 puntos en todo el torneo.
  De los 27 posibles desenlaces vamos a descartar todos los en los que A no gana o empata.
  El primer caso en el que A no gana es que empaten los tres jugadores, es decir obteniendo la tripleta (2,2,2). Esto puede suceder de tres formar distintas a saber:
  1. Primer partido gana A, segundo partido gana B, tercer partido gana C.
  2. Los tres partidos empatados.
  3. Primer partido gana B, segundo partido gana C, tercer partido gana A.
  Esto resta 3 posibilidades de las 27.
  La otra manera en que A puede no ganar es que exista un empate entre dos jugadores. El empate se daría únicamente en el caso en el que dos jugadores tengan 3 puntos y otro cero puntos. Así hay 3 casos más en los que A no ganaría (3,3,0), (3,0,3), (0,3,3).
  Esto resta otras 3 posibilidades de las 27.
  Una vez que se quitan las posibilidades en las que A empata, se tiene 21 casos más, en cuales, es seguro que habrá un ganador. De esos 21 casos, A sale favorecido en la tercera parte de ellos. Es decir en 7 escenarios posibles.

  Otra forma:
  Dado que A juega dos partidas y para cada una existen tres resultados posibles (ganar, empatar o perder), existen seis posibilidades para las dos partidas de A:

  1) que gane ambas (obtiene 4 puntos)
  2) que gane una y empate otra (obtiene 3 puntos)
  3) que gane una y pierda otra (obtiene 2 puntos)
  4) que empate ambas (obtiene 2 puntos)
  5) que empate una y pierda otra (obtiene 1 puntos)
  6) que pierda ambas (obtiene 0 puntos)

  Solamente las dos primeras opciones generan formas de que A gane el torneo porque en total se reparten 6 puntos en las tres partidas y si A tiene, por ejemplo, 2 puntos, como ocurre en los casos 3 y 4, entonces B y C deben repartirse los restantes 4 puntos; es decir, alguno de los dos necesariamente obtiene al menos 2 puntos. El mismo razonamiento aplica en los casos 5 y 6.
  Si gana ambas partidas, ganará el torneo independientemente del resultado entre B y C. Como existen tres posibles resultados para esta partida, existen tres maneras de desarrollarse el torneo de modo que Ana gane.
  La segunda opción genera dos posibilidades: Que A le gane a B y empate con C
  o viceversa. En cada uno de estos casos hay dos posibles resultados de la partida entre B y C que hacen que A gane el toreneo. Por ejemplo, si A le gana a B y empata con C, puede ocurrir

que B y C empaten o que B le gane a C (si C le gana a B entonces C hace 3 puntos y empata el puntaje total con A). Estos posibles resultados se resumen en la siguiente tabla

A-B	2-0	2-0	2-0	2-0	2-0	1-1	1-1
A-C	2-0	2-0	2-0	1-1	1-1	2-0	2-0
B-C	2-0	1-1	0-2	1-1	2-0	1-1	0-2
Puntos A	4	4	4	3	3	3	3
Puntos B	2	1	0	1	2	2	1
Puntos C	0	1	2	2	1	1	2

Vemos que en total hay 7 formas en las que Ana gana el torneo.

20. Se tiene una caja de base rectangular que tiene $600\,000\ cm^3$ de volumen, la llamaremos **caja 1**. Se necesita construir una segunda caja de la siguiente manera:

    - A la arista de mayor longitud de la caja 1 se le corta $\frac{1}{5}$ de su tamaño y con el mayor de los segmentos se forma una de las aristas de la caja 2.
    - A la arista de menor longitud de la caja 1 se le agrega la mitad de su tamaño para formar otra de las aristas de la caja 2.
    - La arista de longitud intermedia de la caja 1 se quintuplica para formar la otra arista de la caja 2.

    El volumen de la caja 2, en m^3, es

    (a) 3,6

    (b) 4,3

    (c) 8

    (d) 9,6

- Opción correcta: (a)
- Solución: Una de las aristas de la caja 2 será $\frac{4}{5}$ de una de las aristas de la caja 1.
  Otra de las aristas de la caja 2 es $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ de una de las aristas de la caja 1.
  La otra arista de la caja 2 es la arista de la caja 1 multiplicada por 5.
  Así el volumen de la caja 2 es $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot 5$ veces el volumen de la caja 1.
  Esto es el volumen de la caja 2 es 6 veces el volumen de la caja 1, es decir $6\cdot 600\,000 = 3\,600\,000 cm^3$
  Luego de hace la conversión de cm^3 a m^3
  $3\,600\,000 cm^3 \left(\frac{1m^3}{1\,000\,000 cm^3}\right)$
  Entonces el volumen de la caja 2 es $3{,}6 m^3$