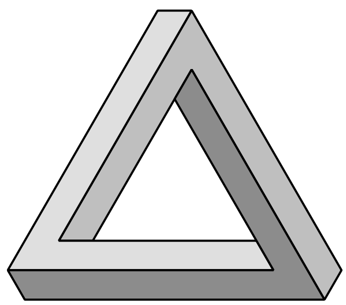
XXXIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UNED - MICITT

SOLUCIÓN
PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



Nivel II
$(8^\circ - 9^\circ)$

2021

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2021 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.

La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. Luis, Pedro, Alonso y Mario son 4 amigos. Cada uno practica solo un deporte de manera profesional: fútbol, natación, tenis y boxeo; y ha viajado solo a un país: Francia, Alemania, Inglaterra y España. Se tiene la siguiente información:

   - Pedro no practica el fútbol.
   - Alonso y el tenista nunca han viajado ni a Inglaterra ni a España.
   - Luis y el boxeador nunca han viajado a España.
   - El nadador ha viajado a Francia.

   De acuerdo con la información anterior, ¿quién es el boxeador?

   (a) Luis
   (b) Pedro
   (c) Alonso
   (d) Mario

- Opción correcta: (b)
- Solución: Dado que Alonso y el tenista nunca han viajado ni a Inglaterra ni a España, entonces han viajado a Francia y a Alemania (cada uno solo a un país). Pero Alonso no es el tenista y como el nadador ha viajado a Francia, entonces se deduce que Alonso es el nadador. Ahora, el tenista ha viajado a Alemania y el boxeador a Inglaterra y como Luis no ha viajado a España, entonces Luis es el tenista y por tanto Mario es el futbolista y ha viajado a España. Y así, Pedro es el boxeador.

2. Sean x, y números reales distintos de cero tales que $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=-2$. El resultado de la operación

$$\frac{3^{x^2}\cdot 9^{xy}}{3^{2-y^2}}$$

   corresponde a

   (a) $\dfrac{1}{9}$
   (b) $\dfrac{1}{3}$
   (c) $\dfrac{1}{27}$
   (d) 1

- Opción correcta: (a)
- Solución: Dado que $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=-2$, entonces se tiene que $\dfrac{x^2+y^2}{xy}=-2$, es decir que $x^2+2xy+y^2=0$.

  Luego $\dfrac{3^{x^2}\cdot 9^{xy}}{3^{2-y^2}}=\dfrac{3^{x^2}\cdot 3^{2xy}\cdot 3^{y^2}}{3^2}=\dfrac{3^0}{3^2}=\dfrac{1}{9}$.

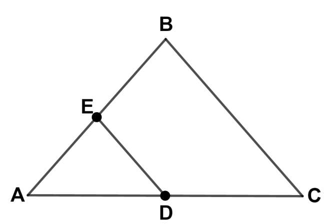
3. En un triángulo ABC, se tiene que la $m\angle ACB = 33°$. Considere un punto M sobre $\overline{AC}$ de modo que $AM = AB$ y $m\angle CAB = m\angle MBC$, entonces la $m\angle ABC$ corresponde a

   (a) 49°
   (b) 71°
   (c) 98°
   (d) 109°

- Opción correcta: (d)
- Solución: Como $AB = AM$, entonces $m\angle AMB = m\angle ABM$. Por el teorema del ángulo externo, $m\angle AMB = m\angle MBC + 33°$ y por el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo, se tiene que $m\angle BAC + m\angle ABC + m\angle ACB = 180°$, de donde se concluye que $m\angle BAC$ es 38° y $m\angle ABM$ es 71°. Por tanto $m\angle ABC$ es 109°.

4. En la figura adjunta, se tiene que $AB = BC$. Si D y E son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, $AC = 24$ y la altura del $\triangle ABC$ sobre $\overline{AC}$ mide lo mismo que $\overline{DE}$, entonces el área del triángulo ABC corresponde a

   (a) $96\sqrt{3}$
   (b) $48\sqrt{3}$
   (c) $24\sqrt{3}$
   (d) $12\sqrt{3}$



- Opción correcta: (b)
- Solución: Como $AB = BC$, entonces al trazar la altura sobre $\overline{AC}$ se tiene que $AD = 12$ y el triángulo ABD es rectángulo. Además, como $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$, entonces se concluye que el triángulo AED es isósceles. Ahora, si se denota x como la altura, por pitágoras se obtiene que $4x^2 = x^2 + 12^2$ y se obtiene que $x = 4\sqrt{3}$ y por tanto el área del triángulo es $A = \dfrac{24 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$.

5. Considere la siguiente situación:
   Marvin es nieto de Paula quien es suegra de Daniel. Mariela quien está casada con David, tiene un hijo que está casado con Diana, nuera de Leonel e hija única de Paula.

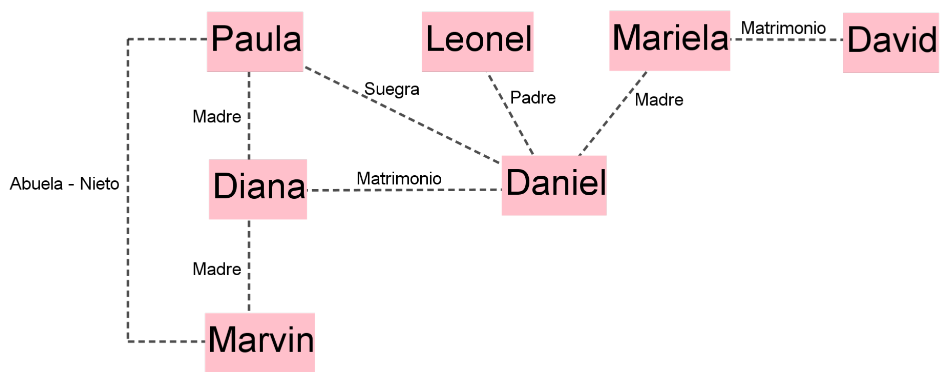
   De la información anterior considere las afirmaciones.

   I) Marvin es nieto de David.
   II) Daniel es hijo de Leonel.
   III) Leonel es esposo de la mamá de Daniel.
   IV) La nuera de Mariela es madre de Marvin.

   De ellas suceden con certeza únicamente

   (a) I y II
   (b) I y III
   (c) II y III
   (d) II y IV

- Opción correcta: (d)
- Note que Paula es Abuela de Marvin y Diana es hija única de Paula, por lo tanto la madre de Marvin es Diana. Como Paula es Suegra de Daniel y Diana es hija única de Paula, entonces Daniel es el esposo de Diana. Como Diana es nuera de Leonel eso implica que Daniel es Hijo de Leonel. Como el hijo de Mariela está casado con Diana eso significa que Daniel es hijo de Mariela. Por lo tanto las opción correcta es la d).



6. Cuatro estudiantes deciden prepararse para un examen estudiando un mismo libro que contiene 100 problemas. El estudiante A resuelve todos los problemas, el estudiante B decide saltarse 1 problema a la vez, es decir ignora el primer ejercicio, hace el segundo e ignora el tercero y así sucesivamente. Del mismo modo hacen los demás estudiantes, únicamente que C se salta 2 problemas, y el estudiante D 4 problemas.
¿Cuántos problemas fueron resueltos por exactamente 3 estudiantes?
   (a) 16.
   (b) 29.
   (c) 32.
   (d) 33.

- Opción correcta: (b)
- Con la información anterior se nota que:

Problemas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$	100
A (todos)	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	$\cdots$	x
B (2)		x		x		x		x		x	$\cdots$	x
C (3)			x			x			x		$\cdots$	100
D (5)					x					x	$\cdots$	x

Para ver cuales ejercicios son resueltos por exactamente 3 personas, hay que recordar que A hace todos los ejercicios, entonces debemos ver los que coincidan con otros dos compañeros.

a) B y C: que son del $6 \cdot 1 = 6$ hasta el $6 \cdot 16 = 96$ es decir 16 problemas.
b) B y D: que son del $10 \cdot 1 = 10$ hasta el $10 \cdot 10 = 100$ es decir 10 problemas.
c) C y D: que son del $15 \cdot 1 = 15$ hasta el $15 \cdot 6 = 90$ es decir 6 problemas.

d) Restar los múltiplos de 30, es decir, 30, 60 y 90

Por lo tanto son $16 + 10 + 6 - 3 = 29$

7. En un grupo de estudiantes cada mujer tiene el doble de compañeras que de compañeros, mientras que cada hombre tiene el triple de compañeras que de compañeros. De lo anterior se cumple con certeza que
   (a) El triple de los hombres supera en 4 a las mujeres.

   (b) Las mujeres superan en 5 a los hombres.

   (c) La mitad de los hombres supere en 1 a la tercera parte de las mujeres.

   (d) La mitad de las mujeres supere en 1 a los hombres .

- Opción correcta: (b)

- Sean x, y el número de mujeres y de hombres respectivamente, entonces cada mujer tendrá $x - 1$ compañera y y compañeros, entonces $x - 1 = 2y$, despejando $x = 2y + 1$ por otro lado cada hombre tendrá $y - 1$ compañero y x compañeras, entonces $3(y - 1) = x$, igualando las dos ecuaciones se tiene que $2y + 1 = 3(y - 1)$, con lo cual $y = 4$, $x = 9$, por lo tanto las mujeres superan en 5 a los hombres.

8. Si $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = k$ entonces el valor de

$$\frac{2021^{x_1+x_2+\cdots+x_{2021}}}{2021^{x_1} + 2021^{x_2} + \cdots + 2021^{x_{2021}}}$$

   corresponde a

   (a) $2021^{2020k-1}$

   (b) $2021^{2020k+1}$

   (c) $2021^{2021k-1}$

   (d) $2021^{2021k+1}$

- Opción correcta: (a)

- Como $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2021} = k$ entonces el numerador de la fracción se puede simplificar como $2021^{x_1+x_2+\cdots+x_{2021}} = 2021^{2021k}$. Por otra parte el denominador se simplifica

$$2021^{x_1} + 2021^{x_2} + \cdots + 2021^{x_{2021}} = 2021^k + 2021^k + \cdots + 2021^k = 2021 \cdot 2021^k = 2021^{k+1}$$

$$\frac{2021^{x_1+x_2+\cdots+x_{2021}}}{2021^{x_1} + 2021^{x_2} + \cdots + 2021^{x_{2021}}} = \frac{2021^{2021k}}{2021^{k+1}} = 2021^{2020k-1}$$

9. Sean m y n números naturales tales que su mínimo común múltiplo es 144, además m es divisible por 8, mientras que n no es múltiplo de 3. Determine la cantidad de posibles valores para $m+n$

   (a) 4.

   (b) 5.

   (c) 6.

   (d) 7.

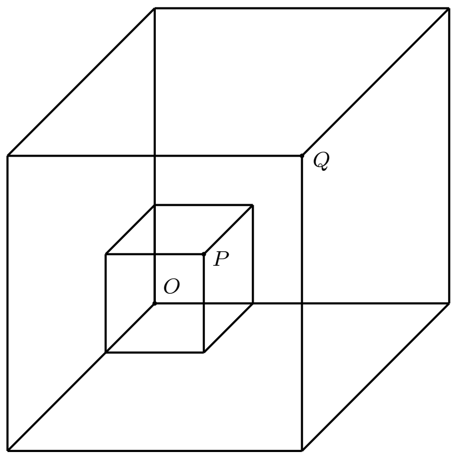
- Opción correcta: (c)

- Como el mínimo común múltiplo de m y n es $144 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot$ entonces $m = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1}$ y $n = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2}$ donde el máximo de $\{a_1, a_2\} = 4$ y el máximo de $\{b_1, b_2\} = 2$. Como m es divisible por $8 = 2^3$ entonces $a_1 = 3$ o $a_1 = 4$, y como n no es múltiplo de 3 entonces $b_2 = 0$ y $b_1 = 2$. Vamos a analizar casos:

  - Si $a_1 = 3$ entonces $a_2 = 4$ y $m = 2^3 \cdot 3^2 = 72$ y $n = 2^4 \cdot 3^0 = 16$ Suma $m + n = 88$
  - Si $a_1 = 4$ entonces $m = 2^4 \cdot 3^2 = 144$ y $a_2 = 0, 1, 2, 3, 4$ es decir 5 opciones para la suma.

  Por lo tanto hay 6 posibles valores para la suman $m + n$.

10. Dentro de un cubo de arista 3 se coloca otro cubo de arista 1 de modo que coincide uno de los vértices. Si P es el vértice del cubo menor opuesto al vértice común O y Q el vértice del cubo grande, también opuesto al vértice común. Como se muestra en la figura.



La distancia entre P y Q corresponde a

(a) $2\sqrt{3}$

(b) $2\sqrt{2}$

(c) $3\sqrt{2}$

(d) $\sqrt{3}$

- Solución: En el cubo menor, la diagonal de la base mide $\sqrt{2}$, entonces $\overline{OP}$ corresponde a la hipotenusa de una triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{2}$ y 1. Por Pitágoras se tiene que $OP = \sqrt{3}$.

  De forma análoga, en el cubo grande la diagonal de la base mide $3\sqrt{2}$, entonces $\overline{OQ}$ corresponde a la hipotenusa de una triángulo rectángulo de catetos $3\sqrt{2}$ y 3. Por Pitágoras se tiene que $OQ = 3\sqrt{3}$.

  Entonces $PQ = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

11. Sean a y b números naturales distintos. Si a y b son cuadrados perfectos menores que 1 000 y tienen exactamente 5 divisores entonces la mayor suma posible de a y b corresponde a

(a) 97

(b) 641

(c) 706

(d) 881

- Solución:

  Por tener exactamente 5 divisores cada uno se tiene que $a = p_1^{\alpha_1}$ y $b = p_2^{\alpha_2}$ con $\alpha_1 = \alpha_2 = 4$ y p_1, p_2 primos.

Los únicos valores menores que 1 000 que cumplen lo pedido son $2^4 = 16,\ 3^4 = 81\ 5^4 = 625$, por lo que la mayor suma posible es $625 + 81 = 706$

12. Alexander tiene en su alcancía una moneda de 25, una de 50, dos de 100 y dos de 500 colones. Necesita 600 colones para comprar una paleta. Si saca aleatoriamente 3 monedas, la probabilidad de que entre ellas tenga al menos los 600 colones que necesita es

    (a) $\frac{7}{10}$
    (b) $\frac{2}{3}$
    (c) $\frac{1}{2}$
    (d) 1

- Solución:

En total tiene 6 monedas, de las cuales extrae aleatoriamente 3. Por lo que se tiene un total de 20 combinaciones, denotemos con A la moneda de 25, con B la moneda de 50, con $C_1,\ C_2$ las monedas de 100 y $Q_1,\ Q_2$ las monedas de 500.

$$
\begin{gathered}
\{(A,B,C_1),(A,B,C_2),(A,B,Q_1),(A,B,Q_2),\\
(B,A,C_1),(B,A,C_2),(B,A,Q_1),(B,A,Q_2),\\
(B,A,C_1),(B,A,C_2),(B,A,Q_1),(B,A,Q_2),\\
(B,A,C_1),(B,A,C_2),(B,A,Q_1),(B,A,Q_2),\\
(A,C_1,B),(A,C_2,B),(A,Q_1,B),(A,Q_2,B)\}
\end{gathered}
$$

Nota: La fórmula para tomar r objetos de un total de n es $\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$, en este caso, la cantidad total de posibles combinaciones es 20.

Observe que es más sencillo contar los casos donde se obtiene una cantidad menor a 600.

Cualquier combinación donde se saque la moneda de 25 y la de 50 no se obtendrán los 600. Existen 4 posibilidades para este caso $(A,B,C_1),(A,B,C_2),(A,B,Q_1),(A,B,Q_2)$.

Tampoco se logra sacar más de 600 si se saca las dos monedas de 100 con alguna de las monedas de 25 o 50. Aquí se tienen 2 posibilidades $(A,C_1,C_2),(B,C_1,C_2)$.
En cualquiera de los demás casos se obtiene al menos 600 coloes, es decir, en los restantes 14 casos. Por lo tanto la probablidad es $\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

13. Sean a, b, c números reales, tales que $a - b + c = 3$, entonces la solución de la ecuación $4ax + 4cx + 3b - 12 = 3a + 3c + 4bx$ corresponde a

   (a) $\dfrac{7}{4}$
   (b) $\dfrac{-1}{4}$
   (c) $\dfrac{13}{21}$
   (d) 3

- Opción correcta: a
- Solución:

$$\begin{aligned}
4ax + 4cx + 3b - 12 &= 3a + 3c + 4bx \\
4ax + 4cx - 4bx &= 3a - 3b + 3c + 12 \\
4x(a - b + c) &= 3(a - b + c + 4) \\
4x \cdot 3 &= 3 \cdot (3 + 4) \\
12x &= 21 \\
x &= \frac{21}{12} = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

14. Un guerrero Panda llamado Po_Ty tiene problemas para subir las escaleras que llevan al templo de su maestro, la cual tiene 1 001 escalones enúmerados, por lo que usa la siguiente estrategia:

   En su primer salto avanza tres escalones, en su segundo salto dos escalones y en el tercer salto un escalón, para luego descansar y comer bambú, así retomar fuerzas y repetir el proceso. Se sabe que Poh_Ty en su primer salto llega al escalón 3, con el segundo salto llega al escalón 5 y en su tercer salto al escalón 6, en el cual descansa para repetir el proceso, entonces el número de saltos que debe hacer el guerrero Panda para llegar al templo de su maestro corresponde a

   (a) 490
   (b) 499
   (c) 500
   (d) 501

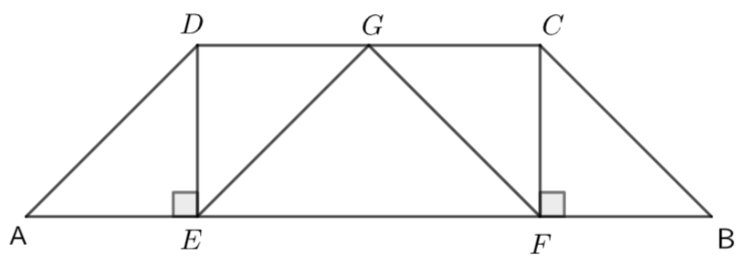
- Opción correcta: (c)
- Solución: Puede notarse con cada 3 saltos, Po_Ty ha recorrido el doble de los escalones, así vemos que después de 498 saltos Po_Ty ha recorrido 996 escalones, con el salto 499, Po_Ty avanza 3 escalones más hasta el escalón 999 y con el salto 500, llegará al escalón 1 001, en el cual está el templo de su maestro.

15. Considere el trapecio $ABCD$, sean E y F puntos en $\overline{AB}$ con $A-E-F-B$, tal que $\overline{DE}$ y $\overline{CF}$ sean perpendiculares a $\overline{AB}$ y además, sea G un punto en $\overline{CD}$.

    Si $AB = 2DC = 4DE$ y $AB = 12cm$ entonces el área del $\triangle EFG$ corresponde a

    (a) $6\,cm^2$
    (b) $9\,cm^2$
    (c) $18\,cm^2$
    (d) $27\,cm^2$

- Opción correcta: (b)
- Solución: De acuerdo con la información dada, se tiene la siguiente figura:



Como $AB = 2DC$ y $AB = 12\,cm$ entonces $DC = 6\,cm$. Además, como $DC = 2DE$ y $DC = 6\,cm$ entonces $DE = 3\,cm$.

Se tiene que $\overline{DE}$ y $\overline{CE}$ perpendiculares a $\overline{AB}$ se tiene ángulos rectos $\angle DEF$ y $\angle DFE$, entonces $\square CDEF$ es un rectángulo. Como $DC = EF$ entoces $EF = 6\,cm$.

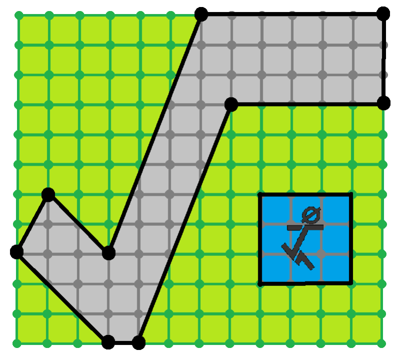
De acuerdo con la figura, se observa que la altura $\overline{DE}$ del trapecio $ABCD$ es la misma del triángulo EFG. Anteriormente, se obtuvo que $DE = 3\,cm$.

Por lo anterior, se tiene que $(EFG) = \dfrac{EF \cdot DE}{2} = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9.$

Por lo tanto, el área del triángulo EFG es $9\,cm^2$.

16. Olcoman vive en una casa cuyo diseño se muestra en la cuadrícula de la figura: el área de construcción, patio y piscina se encuentran pintadas de gris, verde y celeste, respectivamente. La cuadrícula está formada por cuadrados idénticos y todas las paredes de la casa son segmentos de recta que unen los puntos negros. Olcoman nada alrededor de la piscina y quiere saber cuál es su perímetro, pero no tiene cinta métrica y lo único que recuerda es el diseño de su casa (como en la figura) y que el área de construcción (representada en gris) es de $85m^2$.

Con esta información, Olcoman puede deducir que el perímetro de la piscina está entre



(a) $16m$ y $18m$

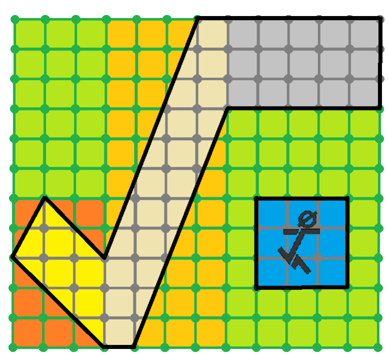
(b) $18m$ y $20m$

(c) $20m$ y $22m$

(d) $22m$ y $24m$

- Opción correcta: (a)
- Solución:

Sea l el lado de los cuadrados que se indican en la cuadrícula. Primero determinamos la cantidad de unidades cuadradas en la figura corresponden al área de construcción. Consideramos los rectángulos como en la figura, de manera que el área gris queda contenida entre estos.



El área total de estos rectángulos es

$$(3 \cdot 5 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 3)l^2 = (15 + 44 + 15)l^2 = 74l^2.$$

La región sobrante está formada por triángulos y su área es igual a

$$\left(\frac{3 \cdot 3}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 8}{2} + \frac{3 \cdot 8}{2}\right)l^2 = \left(\frac{9 + 2 + 4 + 24 + 24}{2}\right)l^2 = \frac{63l^2}{2}.$$

Por lo tanto, el área gris es igual a

$$74l^2 - \frac{63l^2}{2} = \frac{(148 - 63)l^2}{2} = \frac{85l^2}{2},$$

y así concluimos que $l^2 = 2m^2$, o bien $l = \sqrt{2}m$; esto implica que $1,4m < l < 1,5m$. El perímetro de la piscina es $12l$, con lo que deducimos que el perímetro es mayor que $12 \cdot 1,4m = 16,8m$ y menor que $12 \cdot 1,5m = 18m$. Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (a).

17. Cristian tiene una bolsa con 12 confites de caramelo, 12 de chocolate y 6 de menta. Él saca uno y se lo regala a Alex y luego otro y se lo regala a Leo. Si el primero que sacó era de chocolate, entonces la probabilidad de que el segundo también sea de chocolate corresponde a

(a) $\frac{1}{12}$

(b) $\frac{2}{12}$

(c) $\frac{12}{30}$

(d) $\frac{11}{29}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:

Al sacar el primero de chocolate, quedan 11 de chocolate y 29 en total. En consecuencia, la probabilidad es $\frac{11}{29}$.

18. Considere un tanque el cual el tubo A lo llena completamente en 3 horas, mientras que el tubo B lo llena completamente en 1 hora y 20 minutos. Además, el tubo C vacía completamente el tanque en 2 horas.
El tanque esta vacío y una persona abre los tubos A, B y C al mismo tiempo. ¿Qué proporción del tanque falta por llenar a los 90 minutos?

(a) $\frac{1}{8}$

(b) $\frac{3}{8}$

(c) $\frac{5}{8}$

(d) $\frac{7}{8}$

- Opción correcta: (a)
- Solución:

Como 3 horas son 180 minutos, entonces el tubo A llena $\frac{1}{180}$ del tanque cada minuto.

Como 1 hora y 20 minutos son 80 minutos, entonces el tubo B llena $\frac{1}{80}$ del tanque cada minuto.

Como 2 horas son 120 minutos, entonces el tubo C vacía $\frac{1}{120}$ del tanque cada minuto.

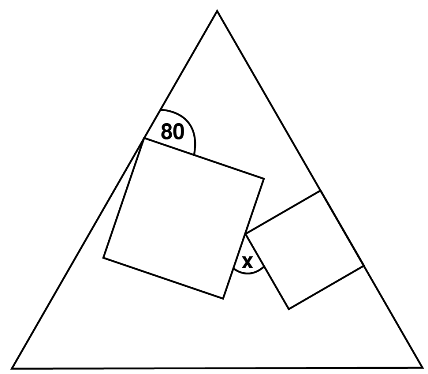
Los tres tubos abiertos al mismo tiempo llenarían $\frac{1}{180}+\frac{1}{80}-\frac{1}{120}$ por minuto.

$$\frac{1}{180}+\frac{1}{80}-\frac{1}{120}=\frac{2^2+3^2-2\cdot 3}{2^4\cdot 3^2\cdot 5}=\frac{7}{2^4\cdot 3^2\cdot 5}$$

Como los tres tubos están abiertos por 90 minutos, entonces se llenará $\frac{7}{2^4\cdot 3^2\cdot 5}\cdot 90$ del tanque, es decir, $\frac{7}{8}$ del tanque.

Por lo que hace falta llenar $\frac{1}{8}$ del tanque.

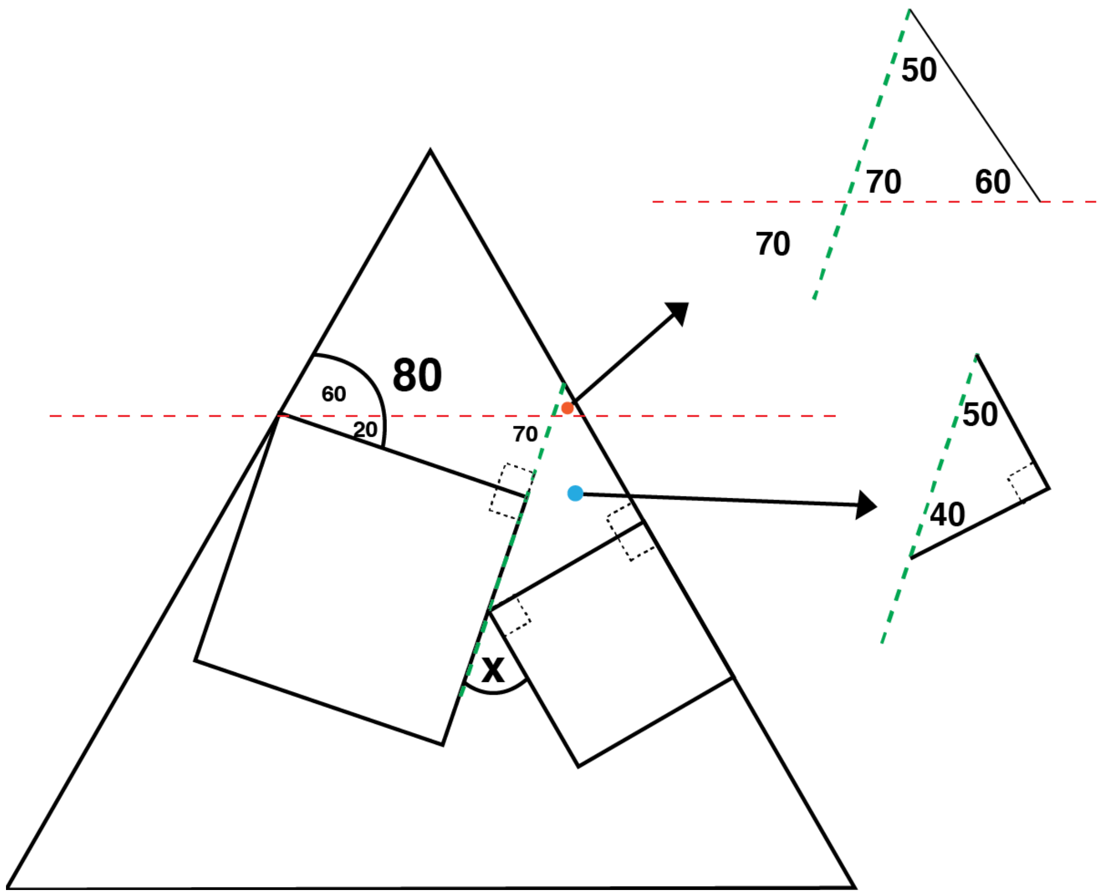
19. Dos cuadrados de distinto tamaño se dibujaron dentro de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo marcado con x?



Poner 80 deg

(a) 25°
(b) 30°
(c) 45°
(d) 50°

- Opción correcta: (d)
- Solución:


50
70
60
70
80
60
20
70
50
40
x

20. Se dispone del siguiente tablero, en el que la tercera casilla de la primera fila tiene un -1 y el resto de las casillas tienen un 1:

1	1	-1
1	1	1
1	1	1

En cada paso se reemplaza el número de cada una de las 9 casillas por el resultado de multiplicar el número de la casilla con los números de las casillas que tienen un lado en común con ella. Con certeza se puede afirmar que al cabo de 2 021 pasos el tablero tiene

(a) las nueve casillas iguales a - 1
(b) únicamente tres casillas iguales a 1
(c) las nueve casillas iguales a 1
(d) únicamente tres casillas iguales a -1

- Opción correcta: (d)
- Solución: De acuerdo con la información dada se tiene lo siguiente:

A

1	1	-1
1	1	1
1	1	1

B

1	-1	-1
1	1	-1
1	1	1

C

-1	1	-1
1	1	1
1	1	-1

D

-1	1	-1
-1	1	1
1	-1	-1

A

1	1	-1
1	1	1
1	1	1

B

1	-1	-1
1	1	-1
1	1	1

Se logra identificar que la configuración se repite cada cuatro pasos. Aplicando el algoritmo de la división se tiene que:

Cuando el residuo es cero se tiene tablero A,
Cuando el residuo es 1 se tiene tablero B,
Cuando el residuo es 2 se tiene tablero C y
Cuando el residuo es 3 se tiene tablero D.

Al dividir $2 021 por 4 se obtiene residuo 1. Quiere decir, que al realizar 2 021 pasos se obtiene tablero B. Por lo tanto, en el tablero B se tiene únicamente tres casillas iguales a -1.