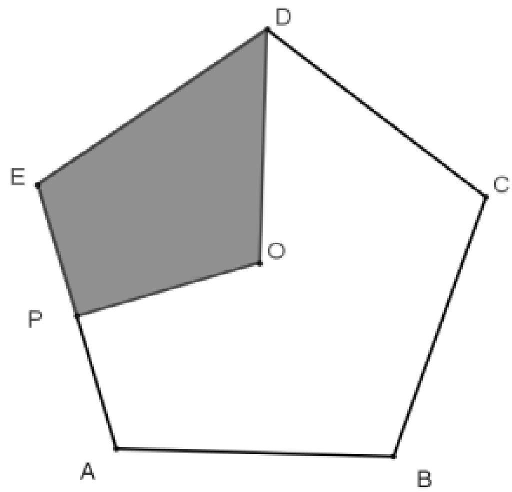
XXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP – ITCR – UCR – UNA – UNED - MICIT

PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



NIVEL C

2012

Estimado (a) estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemática 2012 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas y le desea mucho éxito.

INSTRUCCIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- La prueba consta de un total de 25 preguntas de selección única, todas con el mismo valor.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	Segmento de extremos A y B		$\angle ABC \cong \angle DEF$	Congruencia de ángulos
AB	Distancia entre los puntos A y B.		$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	Congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	Rayo de origen A que contiene a B		$\Delta ABC \sim \Delta DEF$	Semejanza de triángulos
$\angle ABC$	Ángulo de origen B y lados $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$		$\overline{BC} \cong \overline{EF}$	Congruencia de segmentos
$\mathrm{m}\angle ABC$	Medida del $\angle ABC$		$\overparen{AB}$	Arco de extremos A y B
ΔABC	Triángulo de vértices A, B y C.		$\mathrm{m}\overparen{AB}$	Medida del $\overparen{AB}$
$\square ABCD$	Cuadrilátero de vértices A, B, C y D		a / b	El número entero a divide al número b.
$\parallel$	Paralelismo		(ABC)	Área del ΔABC
$\perp$	Perpendicularidad		$A-B-C$	B es un punto entre A y C.

1. Un factor de la factorización completa de $2mx^2y+9y^4-m^2x^2-y^2x^2$ corresponde a

a) $x(m-y)$

b) $x(m+y)$

c) $3y^2+mx-xy$

d) $3y^2-mx-xy$

2. Sean $\overline{AB}$ un diámetro de una circunferencia de centro O y C y D puntos en la circunferencia tales que $\square OBCD$ es un paralelogramo. Entonces, la medida del arco $\widehat{AD}$ es

a) 30°
b) 40°
c) 60°
d) 65°

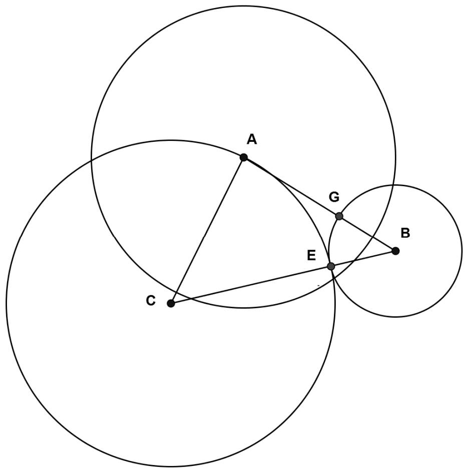
3. En la figura A, B y C son los centros de las circunferencias, tales que $CE=3\cdot EB$, $AB=2\cdot GB$ y el área del círculo de centro B es $16\pi\ \text{cm}^2$. Si C – E – B y A – G – B entonces el perímetro del ΔABC, en centímetros, es

a) 81

b) 36

c) 18

d) 9



4. En un plano considere los puntos colineales de coordenadas $(a,5)$, $(-1,-a)$ y $(2,a)$. El punto de coordenadas $(4-a,a-5)$ se ubica en el

a) I cuadrante

b) II cuadrante

c) III cuadrante

d) IV cuadrante

5. El valor numérico de la expresión $\dfrac{\tan\left(45^{\circ}\right)+\cos\left(60^{\circ}\right)}{\left[\tan\left(30^{\circ}\right)\right]^{-1}}$ es

a) $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\sqrt{3}$

d) $\dfrac{-\sqrt{3}}{6}$

6. Si x y y son números reales mayores que 1, el numerador que se obtiene al racionalizar el denominador y simplificar la expresión $\dfrac{3x}{y\sqrt{2xy}-\sqrt{3x}+\sqrt{8xy^3}}$ corresponde a

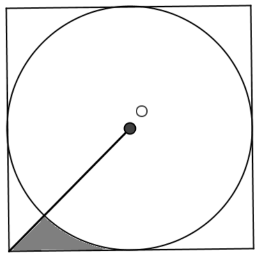
a) $6y^3-1$

b) $6x\sqrt{xy}$

c) $3x\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)$

d) $3y\sqrt{2xy}+\sqrt{3x}$

7. En la figura se muestra un círculo de centro O inscrito en un cuadrado cuyo perímetro es 32 cm. ¿Cuál es el área, en centímetros cuadrados, de la región sombreada con gris?



a) 6π
b) $8 - 2\pi$
c) $32 - 2\pi$
d) $2\pi - 4$

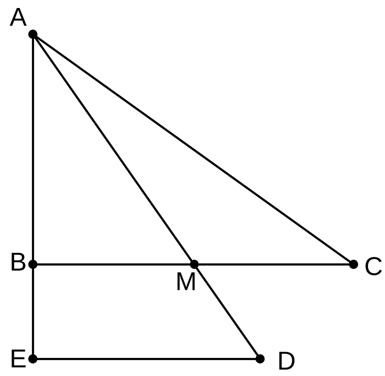
8. Sea $\square ABCD$ un cuadrado de lado a, M, N los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente y P el punto de intersección de $\overline{AM}$ y $\overline{DN}$. La medida de $\overline{PN}$ es

a) $\frac{a\sqrt{5}}{10}$
b) $\frac{a\sqrt{5}}{4}$
c) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$
d) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

9. Carmen tiene cuatro cadenas con distinto número de eslabones cada una de ellas e identificadas con las letras A, B, C y D. Todas las cadenas tienen entre 273 y 290 eslabones. A tiene 12 eslabones menos que B y C tiene 2 menos que D y 5 menos que B. El número de eslabones de la cadena D es divisible por 11. ¿Cuántos eslabones tiene la cadena A?

a) 266
b) 277
c) 279
d) 282

10. En la figura adjunta ΔABC y ΔDEA son triángulos rectángulos congruentes entre sí y M es el punto medio de $\overline{BC}$.



Si $BC = 4$, entonces la medida de $\overline{AC}$ es

a) $2\sqrt{6}$
b) $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$
c) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
d) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

11. Considere la expresión $x^{2012} + x^{2011} + \cdots + x^2 + x + 1$, ¿cuantos números enteros x hacen que dicha expresión sea igual a x^{2012}?

a) Tres
b) Dos
c) Uno
d) Ninguno

12. La medida, en centímetros, de la menor de las alturas de un triángulo cuyos lados miden 6cm, 7cm y 11cm corresponde a

a) $\dfrac{12\sqrt{10}}{11}$

b) $\dfrac{12\sqrt{10}}{7}$

c) $2\sqrt{10}$

d) $6\sqrt{10}$

13. Considere tres números enteros a, b, p tales que p es primo, a excede a p en 2 unidades y b excede a a en 2 unidades. Entonces con certeza se cumple que el recíproco de $\dfrac{b}{a^2-4}$ es un número

a) primo
b) múltiplo de 2
c) racional no entero
d) entero no divisible por p

14. En el siguiente sistema de ecuaciones donde $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $b \neq a$,

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{a}+1=\dfrac{x-y}{b} \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=1 \end{cases}$$

el valor de y es

a) $\dfrac{ab(2b-a)}{(a-b)^2}$

b) $\dfrac{ab(2b+a)}{(a-b)^2}$

c) $\dfrac{a(a-2b)}{(a-b)^2}$

d) $\dfrac{b(2b-a)}{(a-b)^2}$

15. El cuadrilátero $\square ABCD$ es tal que $AD = AB = BC = 1$, $DC = 2$ y $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{DC}$. Entonces la medida del ángulo $\angle DBC$ corresponde a

a) 45°
b) 60°
c) 90°
d) 120°

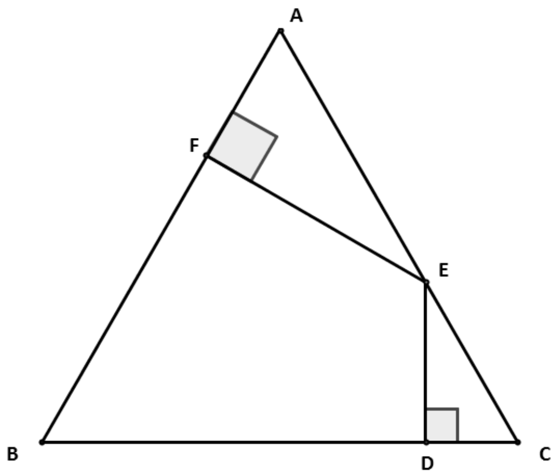
16. Según los datos de la figura adjunta, en donde ΔABC es equilátero de lado *l* y EC = x, el resultado de DE + EF corresponde a

a) $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{4l}{5}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(l-x)$

d) $\frac{l-x}{2}$



17. Considere las funciones $f:\mathbb{N}\to\{1,-1\}$ y $g:\mathbb{N}\to\{1,-1\}$ tales que

$$f(n)=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ es par}\\ -1 & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases} \quad \text{y} \quad g(n)=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ no es primo}\\ -1 & \text{si } n \text{ es primo}\end{cases}$$

Si q es un número natural cuyos divisores primos son todos impares, entonces $f\left(q^{2012}-1\right)+g\left(q^{2012}-1\right)$ corresponde a

a) -2
b) -1
c) 0
d) 2

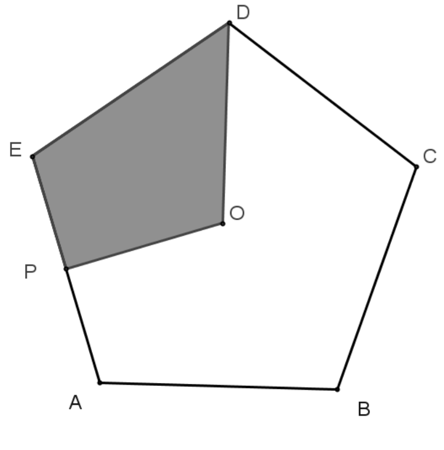
18. Sea x un número real tal que $49^x + 49^{-x} = 7$. Entonces el valor de $7^x + 7^{-x}$ es

a) 9
b) 3
c) $\sqrt{7}$
d) $\sqrt{5}$

19. Considere las funciones $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ y $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ con $f(n)=\begin{cases} n+1 & \text{si } k(n) \text{ es par} \\ n-1 & \text{si } k(n) \text{ es impar} \end{cases}$ y $k(n)=1+2+\cdots+(n-1)+n$. El valor de $f(2012)$ corresponde a

a) 2011
b) 2012
c) 2013
d) 2014

20. En la figura ABCDE es un pentágono regular de centro O y P es el punto medio de $\overline{AE}$. ¿Qué porcentaje del área del pentágono es el área del cuadrilátero que está sombrado?



a) 20%
b) 25%
c) 30%
d) 40%

21. La cantidad de soluciones reales de la ecuación $\frac{\log\left(4-x^2\right)}{\log\left(2-x\right)}=1$ es

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

22. Un trapecio isósceles tiene tres lados congruentes y un ángulo de 45°. Si el perímetro es 14 cm entonces su área, en cm^2, es

a) $2\sqrt{2}-1$
b) $9-4\sqrt{2}$
c) $1+5\sqrt{2}$
d) $2+10\sqrt{2}$

23. La cantidad de números naturales de tres o cuatro cifras que tienen exactamente tres divisores positivos es la siguiente

a) 17

b) 19

c) 21

d) 23

24. Sea D el pie de la altura sobre la hipotenusa del ΔABC rectángulo en A. Si $BD = \frac{3}{2}$ y la razón entre el área del ΔABD y el área del ΔADC es $\frac{4}{9}$ entonces BC es igual a

a) $\frac{9}{2}$

b) $\frac{9}{4}$

c) $\frac{27}{8}$

d) $\frac{39}{8}$

25. Una solución de la ecuación $a(x-1) = \frac{2bx}{x+1}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ constantes diferentes de cero, es

a) $\frac{b-\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

b) $\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}$

c) $\frac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{b}$

d) $\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}$