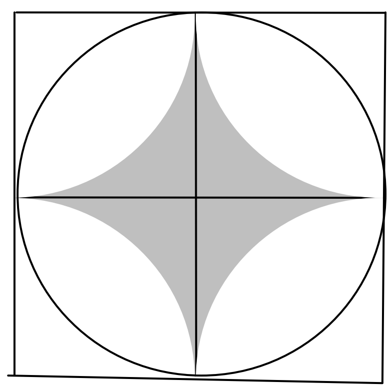
OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

PROYECTO INTERINSTITUCIONAL

UNA-UNED-UCR-ITCR-MICIT-MEP

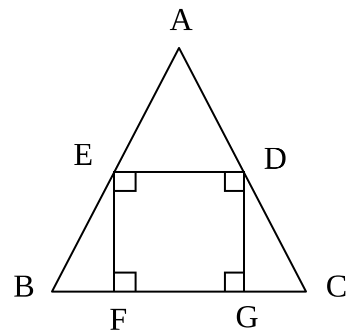
SOLUCIÓN PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



TERCER NIVEL (10°, 11° y 12°)

2013

1. La medida del perímetro del triángulo equilátero ΔABC que se representa en la figura adjunta es de 36cm. Entonces el área en centímetros cuadrados del cuadrado □DEFG corresponde a



A) $\dfrac{2\sqrt{3}+12}{15}$

B) $\dfrac{12\sqrt{3}+9}{5}$

C) $144\left(2\sqrt{3}-3\right)^2$

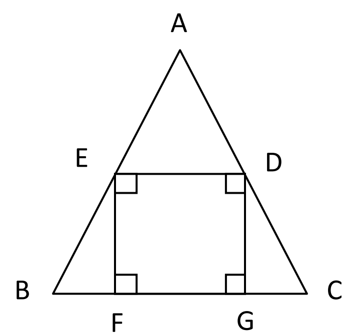
D) $6+\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

Solución: Como los triángulos ΔEBF y ΔDGC son semiequiláteros (30°, 60°, 90°) , si se define x: lado del cuadrado □DEFG, se cumple que,

BF = GC = $\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ entonces como,

BC = $\frac{36\text{cm}}{3} = 12\text{cm}$ y

$\frac{x\sqrt{3}}{3} + x + \frac{x\sqrt{3}}{3} = 12$



$x\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right) = 12$

$x\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right) = 12$

$$x = \frac{12 \cdot 3}{2\sqrt{3}+3} = \frac{36}{2\sqrt{3}+3} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}-3} = \frac{36\left(2\sqrt{3}-3\right)}{12-9} = 12\left(2\sqrt{3}-3\right)\text{cm}$$

Entonces el área del cuadrado □DEFG es,

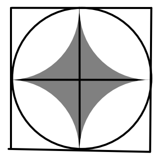
$$A_{Cuadrado} = x^2 = 12^2\left(2\sqrt{3}-3\right)^2 \text{cm}^2 = 144\left(2\sqrt{3}-3\right)^2 \text{cm}^2$$

Por lo que la opción correcta es C.

2. El área de la región sombreada con gris en centímetros cuadrados de la figura adjunta, que representa un círculo inscrito en un cuadrado cuyo perímetro es de 32cm corresponde a

A) $64 - 16\pi$

B) $64 - 8\pi$



C) $32 - 8\pi$

D) $32\pi - 16$

Solución: El área sombreada corresponde a la diferencia del área de un círculo de radio 4cm y 8 segmentos circulares de radio 4cm y ángulo central 90° entonces,

$$\mathrm{A}_{sombreada} = \mathrm{A}_{círculo} - 8 \cdot \mathrm{A}_{\substack{segmento\\ circular}} = \pi(4)^2 - 8 \cdot \left(\frac{16\pi}{4} - \frac{4^2}{2}\right) =$$

$$16\pi - 8 \cdot (4\pi - 8) = 16\pi - 32\pi + 64 = (64 - 16\pi)\mathrm{cm}^2$$

Respuesta correcta la opción A.

3. Un factor de la factorización completa de $x^2(y-z) - y^2(x-z) + z^2(x-y)$ corresponde a

A) $y+z$

B) $x^2 - xy + y^2$

C) $x - y$

D) $x + z$

Solución: Al factorizar completamente,

$$x^2(y-z) - y^2(x-z) + z^2(x-y) =$$

$$\overline{x^2y} - \widehat{x^2}z - \overline{xy^2} + \widehat{y^2}z + xz^2 - yz^2 =$$

$$xy(x-y) - z(x+y)(x-y) - z^2(x-y)$$

$$(x-y)(xy-z(x+y)+z^2)$$

$$(x-y)(y-z)(x-z)$$

Por lo que la opción correcta es C.

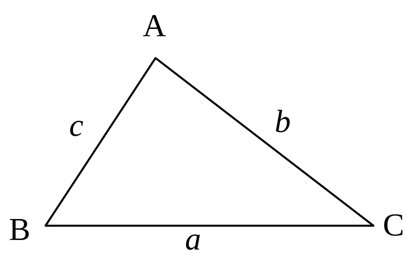
4. Según los datos de la figura adjunta. Una expresión equivalente a $\dfrac{\text{sen A}+\text{sen B}}{\text{sen B}}$ corresponde a

A) $\dfrac{a+b}{b}$

B) $\dfrac{a-b}{a}$

C) $\dfrac{a-c}{b}$

D) $\dfrac{a+b}{c}$



Solución: Utilizando la ley de senos se tiene que,

$$\frac{a}{\text{sen A}}=\frac{b}{\text{sen B}}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\text{sen A}}{\text{sen B}}$$

$$\frac{a}{b}+1=\frac{\text{sen A}}{\text{sen B}}+1$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{\text{sen A}+\text{sen B}}{\text{sen B}}$$

Por lo que la opción correcta es A.

5. El valor numérico de la expresión $\dfrac{2\cos(60^\circ)-2\cos(30^\circ)-\tan(45^\circ)}{\operatorname{sen}(45^\circ)}$ es

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B) $\sqrt{6}$

C) $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

D) $-\sqrt{6}$

Solución: Opción D, pues

$$\frac{2\cos(60^\circ)-2\cos(30^\circ)-\tan(45^\circ)}{\operatorname{sen}(45^\circ)}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1-\sqrt{3}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{-\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=-\sqrt{6}$$

6. Sean a y b números reales tales que $0<a<b$ y α la medida de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Si la hipotenusa del triángulo mide $a+b$ y el cateto opuesto al ángulo α mide $b-a$, entonces $\cos\alpha$ equivale a

A) $\dfrac{4\sqrt{ab}}{a+b}$

B) $\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}$

C) $\dfrac{4ab}{a+b}$

D) $4ab$

Solución: Sea x el cateto adyacente al ángulo α. Por teorema de Pitágoras se tiene que $(a+b)^2=(b-a)^2+x^2$, es decir

$$a^2+2ab+b^2=a^2-2ab+b^2+x^2 \quad\Rightarrow\quad 4ab=x^2 \quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{ab}=x$$

De esta forma se tiene que: $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}$. Respuesta correcta opción B.

7. La expresión $1+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ es equivalente a

A) $-\sqrt{5}$

B) $2-\sqrt{5}$

C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{5}+2$

Solución: Al racionalizar el denominador de,

$$1+\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 1+\sqrt{1-2\sqrt{5}+5} = 1+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2} = 1+\left|1-\sqrt{5}\right|$$

$$= 1+\sqrt{5}-1 = \sqrt{5}.$$

Por lo que la opción correcta es C.

8. La ecuación $x^2-x+m^2-2mx=2+2m$ tiene dos soluciones reales distintas, para cualquier valor de m que cumpla con la siguiente condición

A) $m<-\dfrac{3}{4}$

B) $m>-\dfrac{3}{4}$

C) $m\geq -21$

D) $m<-21$

Solución: Opción B, pues

$x^2-x+m^2-2mx=2+2m \quad \Rightarrow \quad x^2-\left(2m+1\right)x+m^2-2m-2=0$ (1).

La ecuación (1) tiene soluciones reales distintas si $\Delta>0$. Por lo tanto,

$\left[-\left(2m+1\right)\right]^2-4\left(m^2-2m-2\right)>0 \quad \Rightarrow \quad 4m^2+4m+1-4m^2+8m+8>0 \quad \Rightarrow$

$12m+9>0 \quad \Rightarrow \quad m>\dfrac{-9}{12} \quad \Rightarrow \quad m>\dfrac{-3}{4}$

9. Si a, b y c son números reales positivos tales que $a+b=2$, $b+c=3$ y $c+a=4$ entonces el valor de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ es

A) $\frac{8}{3}$

B) $\frac{3}{8}$

C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{3}{4}$

Solución: Opción A, ya que

$$a+b=2 \quad \Rightarrow \quad b=2-a$$
$$c+a=4 \quad \Rightarrow \quad c=4-a$$
$$b+c=3 \wedge b=2-a \wedge c=4-a \Rightarrow 2-a+4-a=3 \Rightarrow -2a=3-6 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$
$$a=\frac{3}{2} \wedge b=2-a \Rightarrow b=2-\frac{3}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$
$$a=\frac{3}{2} \wedge b=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$

10. Supongamos que $-1+\sqrt{x^4-1}$ es una expresión algebraica cuyo valor es igual a $\sqrt{2013}$. Entonces el valor de la expresión $x^4-x^2-\sqrt{x^4-1}+\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}}$ es igual a

A) 2010

B) 2013

C) 2012

D) $\sqrt{2013}$

Solución: Lo primero a realizar es la racionalización del cuarto sumando que aparece en la expresión a la cual le queremos calcular su valor. Para esto debemos multiplicar y dividir por $x^2-\sqrt{x^4-1}$. Entonces se tiene que

$$\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}} = \frac{x^2-\sqrt{x^4-1}}{\left(x^2+\sqrt{x^4-1}\right)\left(x^2-\sqrt{x^4-1}\right)} = x^2-\sqrt{x^4-1}$$

Luego se concluye que

$$x^4-x^2-\sqrt{x^4-1}+\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}} = x^4-2\sqrt{x^4-1}$$

Como $-1+\sqrt{x^4-1} = \sqrt{2013}$, se sigue que $(-1+\sqrt{x^4-1})^2 = 2013$, pero $(-1+\sqrt{x^4-1})^2 = x^4-2\sqrt{x^4-1}$.

Por lo tanto, la opción correcta es la B.

11. Al factorizar $4x^4+32x^2+81$, uno de los factores que se obtiene corresponde a

A) $2x^2+2x-9$

B) $2x^2+2x+9$

C) $2x^2-2x-9$

D) $-2x^2+2x+9$

Solución: Opción B.

$$4x^4+32x^2+81 = 4x^4+\left(36x^2-4x^2\right)+81 = \left(4x^4+36x^2+81\right)-4x^2 = \left(2x^2+9\right)^2-4x^2$$
$$= \left[\left(2x^2+9\right)+2x\right]\left[\left(2x^2+9\right)-2x\right] = \left(2x^2+2x+9\right)\left(2x^2-2x+9\right)$$

12. Si a y b son números reales tales que $ab = 2$, y si x, y, a, b satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=-1 \\ \dfrac{x}{b}-\dfrac{y}{a}=2 \end{cases}$$

Entonces el valor de xy es

A) $-\dfrac{2}{3}$

B) $\dfrac{3}{2}$

C) $-\dfrac{3}{2}$

D) $\dfrac{2}{3}$

Solución: $\begin{cases} \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=-1 \\ \dfrac{x}{b}-\dfrac{y}{a}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{ax+by}{ab}=-1 \\ \dfrac{ax-by}{ab}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+by=-ab \\ ax-by=2ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+by=-2 \\ ax-by=4 \end{cases} \Rightarrow$

$$2ax=2 \Rightarrow x=\frac{1}{a}$$

De esta forma

$$ax-by=4 \wedge x=\frac{1}{a} \Rightarrow a\frac{1}{a}-by=4 \Rightarrow -by=3 \Rightarrow y=\frac{-3}{b}$$

Por lo tanto, $xy=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{-3}{b}=\dfrac{-3}{ab}=-\dfrac{3}{2}$.

Opción C la respuesta correcta.

13. Las aristas de un cubo están pintadas de tal forma que cada cara tiene tres aristas blancas y una negra. Entonces, el total de aristas blancas que tiene el cubo son

A) 3

B) 4

C) 6

D) 9

Solución: Como hay 6 caras y cada arista comparte 2 caras, deben haber 3 aristas negras. Por lo tanto, hay $12-3=9$ aristas blancas. Opción D respuesta correcta.

14. Susana compró confites de 8 colones y chocolates de 10 colones. El pulpero confundió los precios y cobró al revés por lo que tuvo que cobrar 6 colones más a Susana. Si ella tenía 30 confites, la cantidad de chocolates que compró es

A) 30

B) 31

C) 33

D) 35

Solución: Sean a la cantidad de confites y b la cantidad de chocolates, entonces $(8a+10b)=(10a+8b)+6 \Rightarrow 2b=2a+6 \Rightarrow b=a+3$. Como $a=30$ se sigue que $b=33$.

Por lo que la opción correcta es C.

15. Dos trenes se desplazan en una misma línea de manera que se toparán en algún momento. Si uno viaja a 200 kilómetros por hora y el otro a 100 kilómetros por hora, la distancia a la que se encuentran un minuto antes de toparse es

A) $\frac{5}{3}$

B) 4

C) 5

D) 10

Solución: En un minuto cada tren recorre $\frac{200}{60}$ y $\frac{100}{60}$ kilómetros, por lo que un minuto antes se encuentran a $\frac{200}{60}+\frac{100}{60}=\frac{300}{60}=5$ kilómetros.

Opción C respuesta correcta

16. La suma de todos los números enteros positivos menores que 100 que tienen exactamente 3 divisores positivos corresponde a

A) 87

B) 139

C) 168

D) 284

Solución: Los únicos enteros positivos que cumplen con la condición son los cuadros de los números primos 2, 3, 5 y 7, es decir, 4, 9, 25 y 49, por lo tanto, su suma es 87.

Opción A respuesta correcta

17. El menor número de enteros positivos consecutivos cuya suma es 1000 corresponde a

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

Solución:
Sean $k, k+1, ..., k+(n-1)$ los n enteros consecutivos. Entonces $k+(k+1)+...+(k+(n-1)) = nk+(1+2+...+n-1) = nk+\frac{(n-1)n}{2} = n\left(k+\frac{n-1}{2}\right)$.
Como la suma debe ser 1000, entonces $n/1000$ y $n-1$ deben ser par. El primer entero positivo que lo cumple es $n=5$.

Opción B respuesta correcta

18. En la década de los ochenta se daba dos puntos al ganador de un partido de fútbol, un punto si se empataba, y cero al perdedor. Resulta que en cierto torneo de fútbol de esa década participaron los equipos de Alajuela, Cartago, Heredia, Limón y Saprissa. En este torneo cada equipo se enfrentó una única vez con cada uno de los demás equipos. Al final del torneo, que tuvo diez encuentros, resultó que la puntuación de cada equipo fue diferente a la de los demás. ¿Cuál es el número máximo de empates que pudo haber en dicho torneo?

A) 7

B) 8

C) 9

D) 10

Solución: No puede ser que haya diez empates, porque entonces cada equipo tendría igual puntuación que los demás y esto contradice la hipótesis.

No puede ser que haya nueve empates, porque en tal caso un único equipo gana, un único equipo pierde, y los restantes tres equipos sólo empatarían y por lo tanto tendrían la misma puntuación, y una vez más contradice la hipótesis.

No puede haber ocho empates porque entonces en dos partidos habría dos ganadores y dos perdedores. Esto a su vez se divide en subcasos. Si un mismo equipo ganó dos partidos, entonces uno o dos perdieron partidos, y luego los restantes tres o dos tendrían igual puntuación y esto contradice la hipótesis. Si dos equipos distintos ganan, entonces o uno pierde dos veces o dos pierden, y también habría al menos dos equipos con la misma puntuación, por lo tanto se contradice la hipótesis.

Veamos que siete empates sí es posible que ocurran en el torneo. Usemos $X > Y$ para indicar que el equipo de inicial X le gana al equipo con inicial Y. Veamos que los puntajes 6, 5, 4, 3 y 2 se obtienen con siete empates, luego debemos ver cómo tratar a los tres partidos donde no hubo empate. Suponga que $S > A$, $S > H$, con lo cual Saprissa tiene 6 puntos; $C > H$ con lo cual Cartago tiene 5 puntos; Limón queda con 4 puntos; Alajuela queda con 3 puntos y Heredia queda con 2 puntos.

Por lo tanto, la opción correcta es la A.

19. Considere un triángulo CAK en el cual $\overline{\mathrm{CB}}$ es mediana, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ es bisectriz del ángulo en A en el triángulo ABC, $\overline{\mathrm{BM}}$ es mediana del triángulo ABC, y la prolongación de $\overline{\mathrm{AP}}$ es perpendicular al lado $\overline{\mathrm{CK}}$ en E. ¿Cuánto vale $\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PB}}$?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

Solución: Hay varias formas de realizar este ejercicio. Haremos solamente una, la que usa la propiedad del centroide asociado a un triángulo. Observemos que ΔCAE es semejante al ΔKAE. Esto por cuanto tienen sus tres ángulos correspondientes iguales. Luego se cumple lo siguiente:

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AK}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AE}} = 1,$$

de donde CA = AK, lo que indica que el triángulo CAK es isósceles. Además se puede probar por otro argumento de triángulos semejantes que E es el punto medio de CK, luego P es el centroide del triángulo CAK.

Se sabe que tal centroide divide los lados de cada mediana en la proporción dos a uno, luego debe ser que CP : PB = 2 : 1, de donde la respuesta correcta es B.

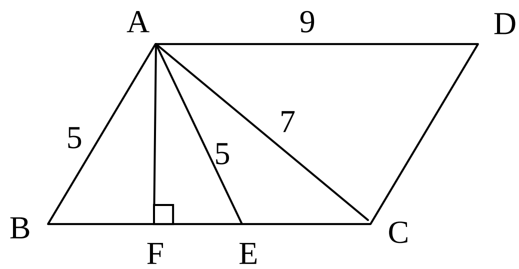
20. Consideremos el siguiente paralelogramo ABCD de la figura adjunta, cuyos lados miden 5 y 9. Si se supone que AE = 5 y AC = 7, entonces el valor de EC es igual a

A) $\frac{8}{3}$

B) 4

C) 6

D) 16



Solución: Una simple aplicación de la ley de cosenos al triángulo ABC indica que 30cos$B$ = 19. Como AB = AD = 5 y $\overline{AF} \perp \overline{BC}$ se sigue que BE = 2BF, pero por simple trigonometría $5\cos m\angle B$ = BF. Luego BF = $\frac{19}{6}$. Por último, se tiene una resta de $9-\frac{19}{3}=\frac{8}{3}$ por lo que la opción correcta, es A.

21. Considere un punto P en el interior del triángulo acutángulo ABC tal que el triángulo APC es rectángulo. Con certeza se cumple que

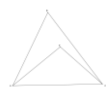
A) $AB \cdot AP + BC \cdot PC > AC^2$

B) $AB \cdot AP + BC \cdot PC < AC^2$

C) $AB^2 + BC^2 = AC^2$

D) $AB^2 + BC^2 < AC^2$

Solución: Tenemos una representación de triángulos similar al siguiente:



Observe que por el teorema de Pitágoras se tiene que $AP^2 + PC^2 = AC^2$ y además $AB > AP$ y $BC > PC$ así que $AB \cdot AP + AC \cdot PC > AC^2$, descartando la opción B.

Ahora la opción C no se cumple pues lógicamente no corresponden a ternas pitagóricas, pues son medidas de lados de un triángulo acutángulo. Y por último la opción D es incorrecta pues la desigualdad que se cumple corresponde a $AB^2 + BC^2 > AC^2$. La respuesta correcta es la opción A.

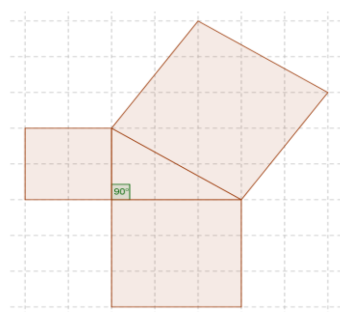
22. Se desea construir un edificio conformado por tres módulos de base cuadrada para albergar una empresa, diseñado de tal forma que tengan un patio común de forma de triángulo rectángulo como se muestra en la figura. Si se sabe que las áreas de las regiones cuadradas suman 2450 m^2 y que el área del patio es 294 m^2. ¿Cuál es, en metros, la suma de los perímetros de los cuadrados menores?

A) 49

B) 98

C) 140

D) 196



Solución: Si $a \le b < c$ son las medidas de los lados de los cuadrados. Entonces, por el teorema de Pitágoras se tiene que $a^2 + b^2 = c^2$.

Como las áreas de las regiones cuadradas suman 2450 m^2 entonces $a^2 + b^2 + c^2 = 2450$

Se tiene entonces que $c^2 + c^2 = 2450 \rightarrow c^2 = 1225 \rightarrow c = 35$

$$\to a+b=35 \to b=35-a$$

$$a^2+b^2=c^2 \to a^2+b^2=1225$$

Como el área del triángulo es 294 entonces $\frac{ab}{2}=294 \to ab=588 \to 2ab=1176$

$$\to a^2+2ab+b^2=1225+1176 \to (a+b)^2=2401 \to a+b=49$$

Por lo tanto la suma de los perímetros de los cuadrados menores es $4(a+b)=4\times 49=196$ m.

Respuesta correcta la opción D

23. Considere dos triángulos semejantes. Los lados de uno de ellos miden 4 cm, 5 cm y 6 cm. El área del otro es $15\sqrt{7}\,\text{cm}^2$ entonces el perímetro de este segundo triángulo es

A) $\frac{15}{16}$ cm

B) $\frac{15}{4}$ cm

C) 30 cm

D) 60 cm

Solución: El área del primero de los triángulos es $\sqrt{\frac{15}{2}\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}}=\frac{15}{4}\sqrt{7}\text{cm}^2$

La razón entre las áreas es $\frac{\frac{15}{4}\sqrt{7}}{15\sqrt{7}}=\frac{1}{4}$ por lo tanto la razón entre los perímetros de los triángulos debe ser $\frac{1}{2}$.

Como el perímetro del primero es 15 cm entonces el perímetro del segundo es 30 cm.

Respuesta correcta opción C.

24. Si un número primo q satisface que $q = p^4 + 3p^2 + 2$ en donde p es un número natural, entonces se puede afirmar que el valor de 2013^{q-1} corresponde a

A) 0

B) 1

C) 2013

D) 2013^{-1}

Solución: Observe que $q = p^4 + 3p^2 + 2 = (p^2+1)(p^2+2)$ así que tenemos solo dos casos, que $p^2+1=1$ por lo tanto $p=0$ ó que $p^2+2=1$ que no tiene solución. Por lo tanto $q=2$ y con esto $2013^{q-1} = 2013$. Respuesta correcta la opción C.

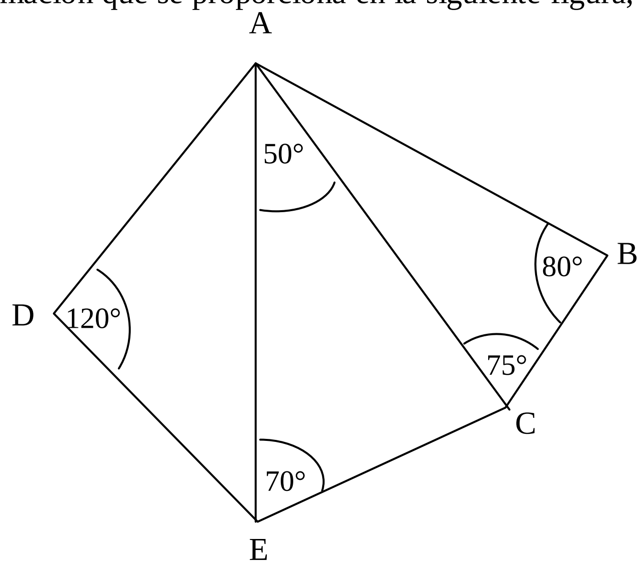
25. De acuerdo con la información que se proporciona en la siguiente figura, con certeza se cumple que

A) $AC > AD$

B) $AD > AC$

C) $EC > AD$

D) $AE > AC$



Solución: Para el triángulo ΔAOE obtusángulo, se tiene que el segmento de mayor longitud es $\overline{AE}$. Pero para el triángulo ΔAEC el segmento con mayor longitud es $\overline{AC}$, pues se opone al ángulo de mayor medida. Lo mismo pasa con el triángulo ΔABC, pues el segmento con mayor longitud es $\overline{AC}$, ya que se opone al ángulo de mayor medida. Por lo tanto el segmento de mayor longitud es $\overline{AC}$. Es decir que $AC > AD$. Observe que no se puede saber con certeza que $EC > AD$. Por lo tanto la respuesta correcta es la opción A.

26. Dos números naturales p y q, tales $p^2q-36pq+324q+p^2-36p=-279$ y $pq+2q+p+2=115$. Entonces el valor de $2p+q$ es igual a

A) 46

B) 47

C) 48

D) 49

Solución: Al factorizar $pq+2q+p+2=115$ obtenemos $(q+1)(p+2)=115$ y además $115=23\cdot 5$, o sea que $(q+1)(p+2)=23\cdot 5$ así que tenemos dos opciones, que $q+1=23, p+2=5$ entonces $q=22, p=3$ ó que $q+1=5, p+2=23$ entonces $q=4, p=21$.

Por otro lado con la expresión $p^2q-36pq+324q+p^2-36p=-279$ es lo mismo escribir $p^2q-36pq+324q+p^2-36p+324=45$ y al factorizar se obtiene $(p-18)^2(q+1)=45$ y tenemos que $q=4, p=21$ satisface la igualdad, mientras que para $q=22, p=3$ no se cumple la igualdad.

Por lo tanto $2p+q=46$. Respuesta correcta la opción A.

27. Si la cantidad de divisores de 6^{2013} corresponde a $pq+1$. Entonces el valor de $pq+2013$ corresponde a

A) 2013^2

B) $2013\cdot 2014$

C) $2013\cdot 2015$

D) $2013\cdot 2016$

Solución: Tenemos que $6^{2013}=2^{2013}\cdot 3^{2013}$ con esto se tendría $(2013+1)(2013+1)=2014^2$ divisores. Entonces $pq+1=2014^2$ es decir que

$pq = 2014^2 - 1 = (2014-1)(2014+1) = 2013 \cdot 2015$ entonces $pq + 2013 = 2013 \cdot 2015 + 2013 = 2013 \cdot 2016$. Respuesta correcta la opción D.

28. Si $6^{y+1} + 6^{y} \cdot 9 = 3240$ entonces el valor de 3^{y}, con y un número natural, corresponde a

A) 3

B) 9

C) 27

D) 81

Solución: Al factorizar un poco y realizar la descomposición prima de 3240 obtenemos $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$. Por lo tanto $6^y(6+9) = 2^y \cdot 3^y \cdot 15 = 2^y \cdot 3^y \cdot 5 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$. Con esto el valor de $3^y = 3^3 = 27$. Respuesta correcta la opción C.

29. La cantidad de parejas (a, b) de enteros positivos que existen tales que $a^b + b^a = ab$ es

A) 0

B) 1

C) 2

D) infinita

Solución:

Realizando el siguiente análisis:

- No hay parejas con $a \geq 2$ y $b \geq 2$, ya que:
  $a^b + b^a \geq a^2 + b^2 \geq 2ab > ab$
- Luego $a = 1$ y $b \geq 2$ y $a \geq 2$ y $b = 1$
  $1 + b = b$ y $1 + a = a$
  No se produce ninguna solución.

- Por último se considera $a=1$ y $b=1$
  1 + 1 = 1 que es una contradicción.

Por lo tanto no hay parejas que cumplan tal condición, entonces la opción correcta es A.

30. Si *a*, *b* y *c* son dígitos y conociendo que $a+b+c=21$. Entonces el valor de la suma de los siguientes números de tres cifras $abc+bca+cab$ corresponde a

A) 63

B) 1234

C) 2013

D) 2331

Solución:

Al efectuar la suma de:

$$\begin{array}{r} abc \\ bca \\ \underline{+cab} \\ 2331 \end{array}$$

Por lo que la opción correcta es D.