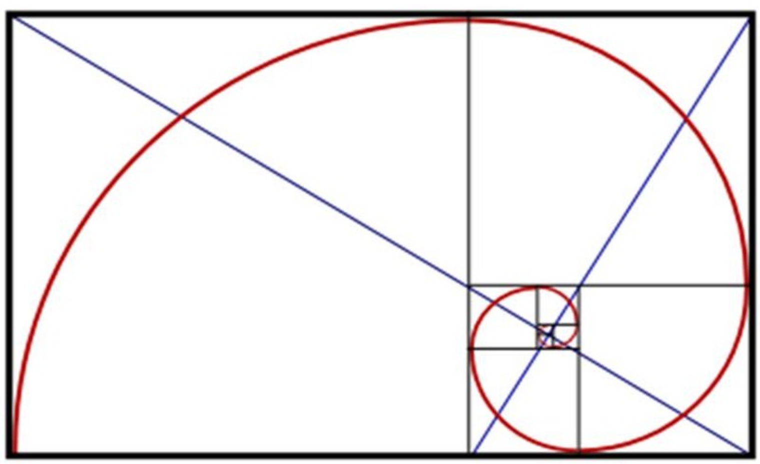
XXVII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



III Nivel

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2015

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemática 2015 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas y le desea los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 25 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 3 de julio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P - Q - R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. El cuadrado de la solución de la ecuación

$$x\sqrt{7}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}-\sqrt{8+3\sqrt{7}}=0$$

corresponde a

(a) 2

(b) 4

(c) $\sqrt{2}$

(d) $\sqrt{7}$

2. Un rectángulo tiene sus lados en razón 1 : 2. Si el menor lado mide, en unidades lineales, m y el rectángulo está inscrito en un círculo, el perímetro del círculo, en unidades lineales, es

(a) $2m\pi$

(b) $4m\pi$

(c) $\sqrt{5}m\pi$

(d) $2\sqrt{5}m\pi$

3. Deseo seleccionar un número para el dorsal de mi camisa del equipo de futbol en el que participo, pero quiero que dicho número esté entre 10 y 115, que exactamente dos de las cifras sean iguales y que sea un número primo. El número de opciones que tengo para escoger mi número de dorsal es

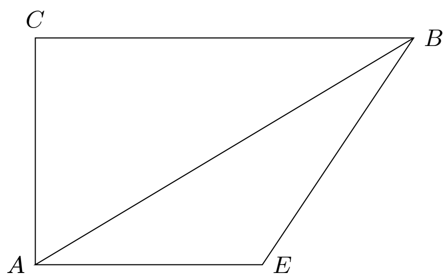
(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 5

4. En el trapecio $AEBC$ hay un ángulo recto en C, mientras que $\overline{AE}$ mide igual que $\overline{BE}$. Si sabemos que las medidas de $\overline{AC}, \overline{CB}$ y $\overline{AE}$ son $6cm, 8cm$ y $5\sqrt{2}cm$, respectivamente, entonces la mediana de AEB, trazada desde E, mide



   (a) $5cm$
   (b) $5\sqrt{2}cm$
   (c) $10cm$
   (d) $10\sqrt{2}cm$

5. En el planeta Orion el año dura lo mismo que en el nuestro, los días de la semana son los mismos pero no hay meses y las fechas son números desde 1 hasta 365. Así, el 1 de enero es el día 1 y el 31 de diciembre el es día 365. Siete extraterrestres cumplen años en días de la semana diferentes. Si se suman las fechas de los cumpleaños, el residuo de dividir la suma por 7 es

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 3
   (d) 6

6. La razón entre las longitudes de las diagonales de un rombo es de 3 : 4. Si la suma de las medidas de dichas diagonales es de 56 unidades lineales entonces el perímetro del rombo es de

   (a) 80
   (b) 96
   (c) 100
   (d) 108

7. Dado un mazo de 10 cartas, enumeradas cada una con único número entero distinto del 1 al 10, ambos inclusive, se toman 3 al azar.
   La probabilidad de que esas 3 formen un conjunto de 3 enteros consecutivos es de

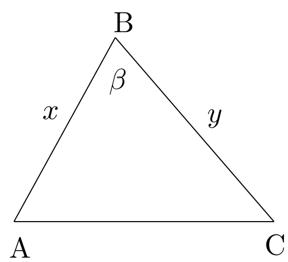
   (a) $\dfrac{1}{90}$

   (b) $\dfrac{1}{12}$

   (c) $\dfrac{1}{15}$

   (d) $\dfrac{1}{9}$

8. En la siguiente figura, si $AB = x$, $BC = y$ y $m\angle ABC = \beta$ entonces el área del $\triangle ABC$ es



   (a) $\dfrac{xy}{2}\operatorname{sen}\beta$

   (b) $\dfrac{xy}{2}\cos\beta$

   (c) $2xy\operatorname{sen}\beta$

   (d) $2xy\cos\beta$

9. Si $x^y = 2$, determine el valor numérico de

$$\sqrt{2}\,y + \left(\frac{1}{x}\right)^{-2y} - x^{\frac{y}{2}}y$$

   (a) 4

   (b) $\dfrac{1}{4}$

   (c) $4 + \sqrt{2}$

   (d) $\dfrac{1}{4} - \sqrt{2}$

10. En un triángulo ABC sean los lados a, b, c aquellos opuestos a los ángulos A, B, C, respectivamente. Si la medida de a es 3 unidades lineales, la de b es $\sqrt{7}$ unidades lineales y la del ángulo B es $\frac{\pi}{3}$, entonces la cantidad de posibles valores que puede tomar c es de

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) 3

11. Si $x > 1$ la expresión

    $$\sqrt{(x-1)(x^2+1)}\sqrt{(x+1)(x^4+1)+\frac{1}{x^3-x^2+x-1}}$$

    es equivalente a

    (a) x^2

    (b) x^4

    (c) x^6

    (d) x^8

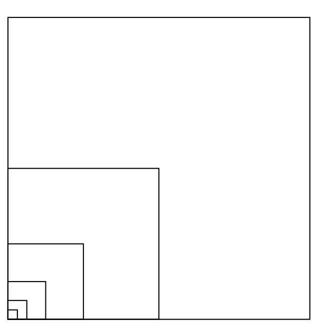
12. En la figura adjunta se muestra una serie de cuadrados, donde el lado de cada uno mide la mitad del anterior. Si se continua de la misma manera hasta construir 2015 cuadrados y si el lado del cuadrado mayor mide 1, entonces el área que está dentro del cuadrado 2014 pero fuera del 2015 es

    (a) $\dfrac{3}{2^{4030}}$

    (b) $\dfrac{3}{2^{4028}}$

    (c) $\dfrac{3}{2^{2015}}$

    (d) $\dfrac{1}{2^{2015}}$



13. Siendo m y n constantes reales, el valor que NO debe tomar el parámetro α para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x - 3y = n \\ \alpha x + 4y = m \end{cases}$ tenga una única solución (x, y) es

   (a) $\dfrac{3}{8}$

   (b) $\dfrac{8}{3}$

   (c) $\dfrac{-3}{8}$

   (d) $\dfrac{-8}{3}$

14. El número 555 555 puede descomponerse como producto de dos factores de tres dígitos

   (a) de ninguna manera

   (b) en solo una manera

   (c) en solo dos maneras

   (d) en solo tres maneras

15. Tenemos un cuadrado $ACBE$ de lado 3 unidades lineales. En $\overline{AE}$ hay un punto D tal que $\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{1}{2}$. Si la intersección entre $\overline{CD}$ y $\overline{BA}$ se denota como H, entonces el área de BCH es

   (a) $\dfrac{9}{8}$

   (b) 2

   (c) $\dfrac{21}{8}$

   (d) $\dfrac{27}{8}$

16. En un trapezoide los lados miden, en orden, $2, 3, 5$ y 6 unidades lineales, y una diagonal mide 4 unidades lineales. Dicha diagonal parte el trapezoide en dos triángulos. El área del mayor de ellos, en unidades cuadradas, es

    (a) $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

    (b) $\dfrac{2\sqrt{5}}{4}$

    (c) $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

    (d) $\dfrac{10\sqrt{11}}{4}$

17. 2015 personas asisten a una convención de videojuegos, a cada persona se le asigna un único número entre 1 y 2015, ambos inclusive. Algunos de ellos competirán en alguno de dos torneos y otros no. Los que competirán en el torneo de fútbol son exactamente todos los que tienen asignado un múltiplo de 11, mientras que los que competirán en el torneo de carreras son exactamente todos los que tienen asignado un múltiplo de 13.
    Analice los siguientes enunciados:

    I) Más personas competirán en carreras que en fútbol.

    II) Más personas competirán en torneos que las que no competirán.

    Los enunciados ciertos son

    (a) I

    (b) II

    (c) I y II

    (d) ninguno

18. Al simplificar la expresión $\dfrac{\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}{(1+\sqrt{7})\sqrt{4+\sqrt{7}}}$ se obtiene como resultado

    (a) 1

    (b) 4

    (c) $1+\sqrt{7}$

    (d) $4+\sqrt{7}$

19. Sea n un entero positivo tal que al dividir a él y a sus dos consecutivos mayores por $2, 5$ y 8 respectivamente, los residuos son 0 y la suma de los cocientes es 12. Entonces la cantidad de enteros que cumplen la condición son

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) 3

20. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $8cm$ y el área es de $9cm^2$ corresponde a

    (a) 10

    (b) 17

    (c) 18

    (d) 64

21. El mayor entero que siempre divide a la expresión $n(n^2-1)$, donde n es impar, corresponde a

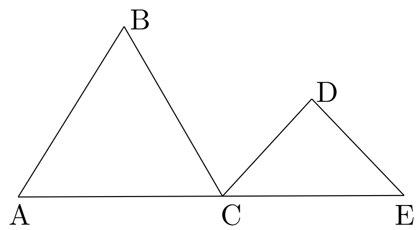
    (a) 6

    (b) 12

    (c) 24

    (d) 48

22. En la siguiente figura $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$ son equiláteros. Si $A - C - E$, $\dfrac{CE}{AC} = \dfrac{1}{2}$ y $AE = 12$, entonces la medida de $\overline{BD}$ es



(a) $2\sqrt{5}$

(b) $4\sqrt{3}$

(c) $2\sqrt{13}$

(d) $4\sqrt{7}$

23. Dado que este año se celebra la 27^a Edición de la Olimpiada Costarricense de Matemática, determine el término 27 de la sucesión $2, 9, 23, 44, 72, 107, ...$

(a) 2015

(b) 2459

(c) 2648

(d) 6885

24. Al efectuar la división

$$(a^{98} - 1) \div \left[a^7(a^{49} - a^{42} + 1) - 1)\right]$$

¿cuántos términos tiene el polinomio cociente?

(a) 5

(b) 6

(c) 7

(d) 8

25. Sea a_n el término n en la sucesión

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$$

Considere los 2015 primeros elementos de dicha sucesión. Entre ellos, la cantidad de números que deja residuo 2 al dividirse entre 3 es

(a) 0

(b) 672

(c) 1007

(d) 1343