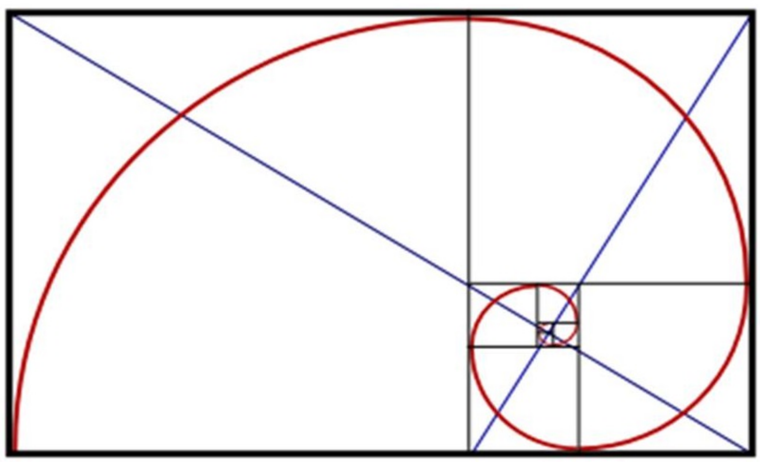
XXVII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

SOLUCIÓN PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



III Nivel

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2015

1. El cuadrado de la solución de la ecuación

$$x\sqrt{7}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}-\sqrt{8+3\sqrt{7}}=0$$

corresponde a

a) 2
b) 4
c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{7}$

Solución:

Opción correcta: Opción a)

$$\begin{aligned}
& x\sqrt{7}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}-\sqrt{8+3\sqrt{7}}=0 \\
\Rightarrow\quad & x\sqrt{7}=\sqrt{8+3\sqrt{7}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}} \\
\Rightarrow\quad & 7x^2=\left(8+3\sqrt{7}\right)+\left(8-3\sqrt{7}\right)-2\sqrt{\left(8+3\sqrt{7}\right)\cdot\left(8-3\sqrt{7}\right)} \\
\Rightarrow\quad & 7x^2=16-2\cdot\sqrt{64-63}=14 \\
\Rightarrow\quad & x^2=2
\end{aligned}$$

2. Un rectángulo tiene sus lados en razón $1:2$. Si el menor lado mide, en unidades lineales, m y el rectángulo está inscrito en un círculo, el perímetro del círculo, en unidades lineales, es

a) $2m\pi$
b) $4m\pi$
c) $\sqrt{5}m\pi$
d) $2\sqrt{5}m\pi$

Solución:

Opción correcta: c)

El mayor lado mediría $2m$ y en consecuencia la diagonal sería igual a $\sqrt{5}m$. Como el rectángulo está inscrito en el círculo, la diagonal es un diámetro, por lo que el perímetro del círculo sería $\sqrt{5}m\pi$.

3. Deseo seleccionar un número para el dorsal de mi camisa del equipo de futbol en el que participo, pero quiero que dicho número esté entre 10 y 115, que exactamente dos de las cifras sean iguales y que sea un número primo. El número de opciones que tengo para escoger mi número de dorsal es

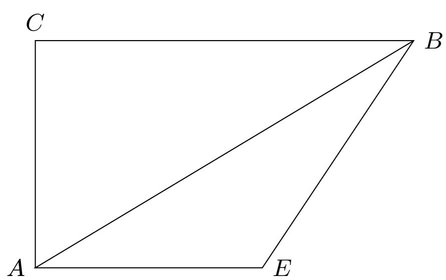
   a) 2
   b) 3
   c) 4
   d) 5

   Solución:

   Opción correcta: $b)$

   Los número que están entre 10 y 115 que poseen solo dos cifras iguales son: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 100, 101, 110, 112, 113, 114, 115. De estos números, son primos: 11, 101 y 113.

4. En el trapecio $AEBC$ hay un ángulo recto en C, mientras que $\overline{AE}$ mide igual que $\overline{BE}$. Si sabemos que las medidas de $\overline{AC}, \overline{CB}$ y $\overline{AE}$ son $6cm, 8cm$ y $5\sqrt{2}cm$, respectivamente, entonces la mediana de AEB, trazada desde E, mide



   a) $5cm$
   b) $5\sqrt{2}cm$
   c) $10cm$
   d) $10\sqrt{2}cm$

   Solución:

   Opción correcta: $a)$

   Usando Pitágoras en el ABC tenemos que $AB = 10$. Como AEB es isósceles, la mediana desde E es también un segmento de mediatriz, por lo que parte AEB en dos triángulos rectángulos, donde, usando Pitágoras otra vez, vemos que el segmento buscado mide 5.

5. En el planeta Orion el año dura lo mismo que en el nuestro, los días de la semana son los mismos pero no hay meses y las fechas son números desde 1 hasta 365. Así, el 1 de enero es el día 1 y el 31 de diciembre el es día 365. Siete extraterrestres cumplen años en días de la semana diferentes. Si se suman las fechas de los cumpleaños, el residuo de dividir la suma por 7 es

   a) 0
   b) 1
   c) 3
   d) 6

   Solución:

   Opción correcta: *a*)

   Como cada día del año es un día de la semana y la semana tiene 7 días, por el algoritmo de la división al ser cada día un número del 1 al 365, se puede expresar de la forma $7p + r$ con $0 \leq r < 7$. Así, al cumplir cada extraterrestre en un día distinto se tienen las formas $7q_0, 7q_1 + 1, 7q_2 + 2, 7q_3 + 3$,$7q_4 + 4, 7q_5 + 5$ y $7q_6 + 6$. Por lo tanto, la suma es $7(q_0+q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6)+21 = 7k$ con k entero, por lo que es múltiplo de 7 y su residuo es 0.

6. La razón entre las longitudes de las diagonales de un rombo es de 3 : 4. Si la suma de las medidas de dichas diagonales es de 56 unidades lineales entonces el perímetro del rombo es de

   a) 80
   b) 96
   c) 100
   d) 108

   Solución:

   Opción correcta: *a*)

   Como la razón es de 3 : 4, podemos decir que las diagonales miden $3d$ y $4d$. Por lo tanto, $3d + 4d = 56 \Rightarrow d = 8$. Como la mitad de cada diagonal forma un triángulo rectángulo con cada lado ℓ, tenemos que $12^2 + 16^2 = \ell^2 \Rightarrow \ell = 20$. Por lo que el perímetro es 80.

7. Dado un mazo de 10 cartas, enumeradas cada una con único número entero distinto del 1 al 10, ambos inclusive, se toman 3 al azar.

   La probabilidad de que esas 3 formen un conjunto de 3 enteros consecutivos es de

   a) $\frac{1}{90}$
   b) $\frac{1}{12}$
   c) $\frac{1}{15}$
   d) $\frac{1}{9}$

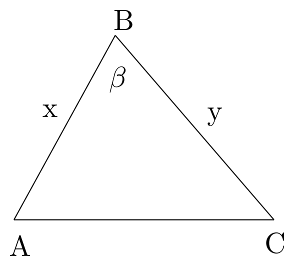
Solución:

Opción correcta: c)

Primero veamos de cuántas maneras podemos sacar 3 cartas. Hay 10 opciones para la primera, 9 para la segunda, y 8 para la tercera. Pero cada grupo de 3 cartas ha sido contado 6 veces pues, si sacamos las cartas a, b, c, en ese orden, es igual que haber sacado cualquiera de la siguiente combinaciones: $(a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$. Por lo que hay $(10)(9)(8)/(6)$ formas totales, lo que es igual a 120.

Ahora bien, las combinaciones que dan enteros consecutivos serían $(1, 2, 3), (2, 3, 4), \ldots, (8, 9, 10)$, o sea, hay 8 en total. Por lo que la probabilidad del evento es de $8/120 = 1/15$.

8. En la siguiente figura, si $AB = x$, $BC = y$ y $m\angle ABC = \beta$ entonces el área del $\triangle ABC$ es

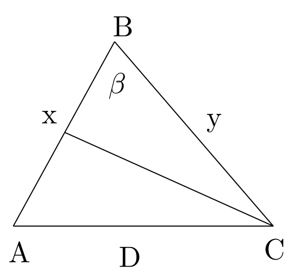


a) $\dfrac{xy}{2} \operatorname{sen} \beta$
b) $\dfrac{xy}{2} \cos \beta$
c) $2xy \operatorname{sen} \beta$
d) $2xy \cos \beta$

Solución:

Opción correcta: a)

Considere la siguiente figura en la que se ha trazado la altura sobre $\overline{AB}$



Sea h la altura desde C.

Se tiene que $sen\beta = \dfrac{h}{y}$, por lo que $h = ysen\beta$.

Entonces

$$A = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x \cdot ysen\beta}{2} = \frac{xy}{2} sen\beta$$

9. Si $x^y = 2$, determine el valor numérico de

$$\sqrt{2}\,y + \left(\frac{1}{x}\right)^{-2y} - x^{\frac{y}{2}}\,y$$

a) 4
b) $\frac{1}{4}$
c) $4 + \sqrt{2}$
d) $\frac{1}{4} - \sqrt{2}$

Solución:

Opción correcta: $a)$

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,y + \left(\frac{1}{x}\right)^{-2y} - x^{\frac{y}{2}}\,y &= \sqrt{2}\,y + x^{2y} - (x^y)^{\frac{1}{2}}\,y \\ &= \sqrt{2}\,y + (x^y)^2 - \sqrt{x^y}y \\ &= \sqrt{2}\,y + (2)^2 - \sqrt{2}y \\ &= 4\end{aligned}$$

10. En un triángulo ABC sean los lados a, b, c aquellos opuestos a los ángulos A, B, C, respectivamente. Si la medida de a es 3 unidades lineales, la de b es $\sqrt{7}$ unidades lineales y la del ángulo B es $\pi/3$, entonces la cantidad de posibles valores que puede tomar c es de

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

Solución:

Opción correcta: $c)$

Usando la ley de cosenos tenemos que

$$7 = 9 + c^2 - 2(3)(c)(1/2) \Rightarrow$$

$$c^2 - 3c + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$c = 1, c = 2.$$

Y como ambas opciones satisfacen la desigualdad triangular, ambas son válidas.

11. Si $x > 1$ la expresión

$$\sqrt{(x-1)(x^2+1)}\sqrt{(x+1)(x^4+1)+\frac{1}{x^3-x^2+x-1}}$$

es equivalente a

a) x^2
b) x^4
c) x^6
d) x^8

Solución:

Opción correcta: *b*)

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x-1)(x^2+1)}\sqrt{(x+1)(x^4+1)+\frac{1}{x^3-x^2+x-1}} &&=\\
&\sqrt{(x-1)(x^2+1)}\sqrt{(x+1)(x^4+1)+\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}} &&=\\
&\sqrt{(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)+1} &&=\\
&\sqrt{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)+1} &&=\\
&\sqrt{(x^4-1)(x^4+1)+1} &&=\\
&\sqrt{x^8-1+1} &&=\\
&x^4
\end{aligned}$$

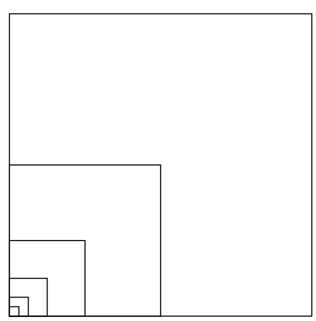
12. En la figura adjunta se muestra una serie de cuadrados, donde el lado de cada uno mide la mitad del anterior. Si se continua de la misma manera hasta construir 2015 cuadrados y si el lado del cuadrado mayor mide 1, entonces el área que está dentro del cuadrado 2014 pero fuera del 2015 es

a) $\dfrac{3}{2^{4030}}$

b) $\dfrac{3}{2^{4028}}$

c) $\dfrac{3}{2^{2015}}$

d) $\dfrac{1}{2^{2015}}$



Solución:

Opción correcta: $b)$

Organizando la información en la siguiente tabla

Cuadrado	*Lado*	*Area*
1	1	$1 = \frac{1}{2^0}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{2\cdot 1}}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4^2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^{2\cdot 2}}$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8^2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{2^{2\cdot 3}}$
5	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16^2} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^{2\cdot 4}}$
6	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32^2} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{2^{2\cdot 5}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^{2\cdot(n-1)}}$

De esta forma, el área del cuadrado 2014 es $A_{2014} = \frac{1}{2^{2\cdot 2013}} = \frac{1}{2^{4026}}$ y el del cuadrado 2015 es $A_{2015} = \frac{1}{2^{2\cdot 2014}} = \frac{1}{2^{4028}}$.

Entonces el área pedida es $\frac{1}{2^{4026}} - \frac{1}{2^{4028}} = \frac{3}{2^{4028}}$

13. Siendo m y n constantes reales, el valor que NO debe tomar el parámetro α para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x - 3y = n \\ \alpha x + 4y = m \end{cases}$ tenga una única solución (x, y) es

   a) $\frac{3}{8}$

   b) $\frac{8}{3}$

   c) $\frac{-3}{8}$

   d) $\frac{-8}{3}$

Solución:

Opción correcta: $d)$

$$\begin{aligned} x = \tfrac{n+3y}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \alpha\left(\tfrac{n+3y}{2}\right) + 4y = m \\ &\Rightarrow \quad \alpha n + 3\alpha y + 8y = 2m \\ &\Rightarrow \quad y = \tfrac{2m-\alpha n}{3\alpha+8} \end{aligned}$$

Luego, $y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3\alpha + 8 \neq 0$, por lo que α no puede tomar el valor $\dfrac{-8}{3}$ si se quiere una única solución. Dicha solución es $\left(\dfrac{4n+3m}{3\alpha+8}, \dfrac{2m-\alpha n}{3\alpha+8}\right)$.

14. El número 555 555 puede descomponerse como producto de dos factores de tres dígitos

   a) de ninguna manera
   b) en solo una manera
   c) en solo dos maneras
   d) en solo tres maneras

Solución:

Opción correcta: $b)$

Como $555\,555 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, la única manera de combinar los factores para lograr expresarlo como producto de dos números de tres cifras es $(3 \cdot 7 \cdot 37)\,(5 \cdot 11 \cdot 13)$.

15. Tenemos un cuadrado $ACBE$ de lado 3 unidades lineales. En $\overline{AE}$ hay un punto D tal que $\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{1}{2}$. Si la intersección entre $\overline{CD}$ y $\overline{BA}$ se denota como H, entonces el área de BCH es

   a) $\dfrac{9}{8}$
   b) 2
   c) $\dfrac{21}{8}$
   d) $\dfrac{27}{8}$

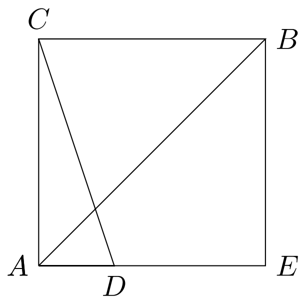
Solución:

Opción correcta: $d)$

Note que como AD es paralela a CB entonces los ángulos HCB y HDA son congruentes, al igual que los ángulos HBC y HAD, por lo que los triángulos CBH y DAH son semejantes.

Como $AD/DE = 1/2$ y $AD + DE = 3$, tenemos que AD=1. Además la razón entre los triángulos es $AD/CB = 1/3$, por lo que la razón entre las alturas es $1/3$ también. En particular, si denotamos como h la altura de ADH que sale de H, y como h' la altura de CBH que sale de H, tenemos que $h/h' = 1/3$, pero también que $h + h' = 3$. Por lo tanto, $h' = 9/4$.

Finalmente, el área sería $(9/4)(3)/2 = 27/8$.



16. En un trapezoide los lados miden, en orden, $2, 3, 5$ y 6 unidades lineales, y una diagonal mide 4 unidades lineales. Dicha diagonal parte el trapezoide en dos triángulos. El área del mayor de ellos, en unidades cuadradas, es

    a) $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

    b) $\dfrac{2\sqrt{5}}{4}$

    c) $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

    d) $\dfrac{10\sqrt{11}}{4}$

    Solución:

    Opción correcta: c)

    Hay dos opciones para la diagonal: una es que forma dos triángulos de lados $(2, 3, 4), (5, 6, 4)$, y la otra es que forma dos triángulos de lados $(2, 6, 4), (3, 5, 4)$. Sin embargo, este último triángulo no satisface la desigualdad triangular. Por lo tanto, la primer opción es la que tenemos. Usando la fórmula de Herón en ambos triángulos vemos que la mayor área da $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$.

17. 2015 personas asisten a una convención de videojuegos, a cada persona se le asigna un único número entre 1 y 2015, ambos inclusive. Algunos de ellos competirán en alguno de dos torneos y otros no. Los que competirán en el torneo de fútbol son exactamente todos los que tienen asignado un múltiplo de 11, mientras que los que competirán en el torneo de carreras son exactamente todos los que tienen asignado un múltiplo de 13.

    Analice los siguientes enunciados:

    I) Más personas competirán en carreras que en fútbol.

    II) Más personas competirán en torneos que las que no competirán.

    Los enunciados ciertos son

    a) I

    b) II

    c) I y II

    d) ninguno

Solución:

Opción correcta: d)

Sean A, B el conjunto de personas que competirán en fútbol y en carreras, respectivamente. Por teoría de conjuntos sabemos que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Como $2015 = 183 \cdot 11 + 2$, hay 183 personas en A, mientras que como $2015 = 155 \cdot 13$, hay 155 personas en B. Además como $2015 = 14 \cdot 13 \cdot 11 + 13$, hay 14 personas en $A \cap B$. Por lo tanto hay $183 + 155 - 14 = 322$ personas compitiendo en total. En conclusión, ambos enunciados son falsos.

18. Al simplificar la expresión $\dfrac{\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}{(1+\sqrt{7})\sqrt{4+\sqrt{7}}}$ se obtiene como resultado

   a) 1
   b) 4
   c) $1+\sqrt{7}$
   d) $4+\sqrt{7}$

Solución:

Opción correcta: a)

Racionalizando obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}{\sqrt{4+\sqrt{7}}(1+\sqrt{7})} &= \frac{\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}{\sqrt{4+\sqrt{7}}(1+\sqrt{7})} \cdot \frac{\sqrt{4+\sqrt{7}}}{\sqrt{4+\sqrt{7}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{7}}}{(1+\sqrt{7})} \\
&= \frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{(1+\sqrt{7})} \\
&= \frac{\sqrt{1+2\sqrt{7}+7}}{(1+\sqrt{7})} \\
&= \frac{\sqrt{(1+\sqrt{7})^2}}{(1+\sqrt{7})} \\
&= 1
\end{aligned}$$

19. Sea n un entero positivo tal que al dividir a él y a sus dos consecutivos mayores por $2, 5$ y 8 respectivamente, los residuos son 0 y la suma de los cocientes es 12. Entonces la cantidad de enteros que cumplen la condición son

    a) 0
    b) 1
    c) 2
    d) 3

    Solución:

    Opción correcta: $b)$

    Los enteros consecutivos son $n+1$ y $n+2$. Como $n+2 = 8k$ con k entero entonces $n = 8k-2 \Rightarrow n = 2(4k-1)$ y por el algoritmo de la división k y $4k-1$ son dos de los cocientes por lo que $k + 4k - 1 = 5k - 1 < 12 \Rightarrow k < \dfrac{13}{5}$ y así al ser n entero positivo $k = 1$ o $k = 2$.
    Si $k = 1, n = 6 \Rightarrow n + 1 = 7$ que no cumple pues no es divisible por 5.
    Si $k = 2, n = 14 \Rightarrow n + 1 = 15$ y $n + 2 = 16$.
    Por lo tanto, solo cumple un entero.

20. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $8cm$ y el área es de $9cm^2$ corresponde a

    a) 10
    b) 17
    c) 18
    d) 64

    Solución:

    Opción correcta: $a)$

    Sean a y b los catetos. Por el teorema de Pitágoras se cumple que $a^2 + b^2 = 8^2$. Por otra parte, dado que el área es de $9cm^2$ se tiene que $\dfrac{a \cdot b}{2} = 9$, de donde $a \cdot b = 18$ y $2ab = 36$.

    Luego

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 64 \\ a^2 + 2ab + b^2 &= 64 + 36 \\ (a+b)^2 &= 100 \\ a + b &= 10 \end{aligned}$$

    Por lo tanto, la suma de los dos catetos del triángulo rectángulo es 10.

21. El mayor entero que siempre divide a la expresión $n(n^2-1)$, donde n es impar, corresponde a

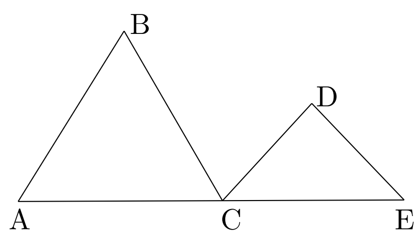
  a) 6
  b) 12
  c) 24
  d) 48

Solución:

Opción correcta: c)

$n(n^2-1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1)$, que es divisible por $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, es decir, $6|n(n^2-1)$.
Por otra parte como n es impar, entonces $n = 2k+1$ con k entero.
$\Rightarrow (2k+1-1)(2k+1)(2k+1+1) = 2k(2k+1)(2k+2) = 2k(2k+1)2(k+1) = 4(2k+1)k(k+1)$
Como $k(k+1)$ es divisible por $1 \cdot 2 = 2$ entonces $k(k+1) = 2r$ con r entero, es decir,
$4(2k+1)k(k+1) = 4(2k+1)2r = 8r(2k+1) \Rightarrow 8|n(n^2-1)$.
Así, por definición de mínimo común múltiplo $[6,8] = 24|n(n^2-1)$.

22. En la siguiente figura $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$ son equiláteros. Si $A-C-E$, $\dfrac{CE}{AC} = \dfrac{1}{2}$ y $AE = 12$, entonces la medida de $\overline{BD}$ es

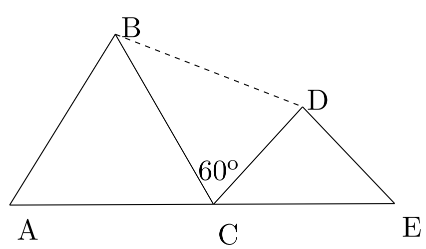


  a) $2\sqrt{5}$
  b) $4\sqrt{3}$
  c) $2\sqrt{13}$
  d) $4\sqrt{7}$

Solución:

Opción correcta: b)

Considere la siguiente figura.



$\dfrac{CE}{AC} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \qquad 2CE = AC\,(1)$

$AE = 12 \quad \Rightarrow \quad AC + CE = 12\,(2)$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) de forma simultánea se obtiene $AC = 8$ y $CE = 4$.

Dado que los triángulos son equiláletos se tiene que $BC = 8$ y $CD = 4$. Aplicando ley de cosenos al $\triangle\, BCD$ se obtiene

$BD^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos 60°$. Luego $BD = 4\sqrt{3}$

23. Dado que este año se celebra la 27^a Edición de la Olimpiada Costarricense de Matemática, determine el término 27 de la sucesión $2, 9, 23, 44, 72, 107, ...$

a) 2015
b) 2459
c) 2648
d) 6885

Solución:

Opción correcta: $b)$

Llamemos a_n al término n de la sucesión.

Observe que

$$\begin{array}{rcl} a_1 = 2 = 2 + 0 & & \\ a_2 = 9 = 2 + 7 & & \\ a_3 = 23 = 2 + 21 & = & 2 + (7 + 14) \quad = \quad 2 + 7(1 + 2) \\ a_4 = 44 = 2 + 42 & = & 2 + (7 + 14 + 21) \quad = \quad 2 + 7(1 + 2 + 3) \\ a_5 = 72 = 2 + 70 & = & 2 + (7 + 14 + 21 + 28) \quad = \quad 2 + 7(1 + 2 + 3 + 4) \end{array}$$

Vemos que

$$a_n = 2 + 7(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) = 2 + \frac{7(n-1)n}{2}$$

Entonces $a_{27} = 2 + \dfrac{7 \cdot 26 \cdot 27}{2} = 2459$

24. Al efectuar la división
$$(a^{98}-1)\div\left[a^7(a^{49}-a^{42}+1)-1)\right]$$
¿Cuántos términos tiene el polinomio cociente?

   a) 5
   b) 6
   c) 7
   d) 8

   Solución:

   Opción correcta: c)

   Primero vamos a simplificar la expresión

$$\begin{aligned}(a^{98}-1)\div\left[a^7(a^{49}-a^{42}+1)-1)\right] &= \frac{(a^{49}-1)(a^{49}+1)}{a^{56}-a^{49}+a^7-1} \\ &= \frac{(a^{49}-1)(a^{49}+1)}{(a^{49}+1)(a^7-1)} \\ &= \frac{a^{49}-1}{a^7-1}\end{aligned}$$

   Al efectuar la división se observa una secuencia en las potencias del cociente:
$$a^{49}-1=(a^7-1)(a^{42}+a^{35}+a^{28}+a^{21}+a^{14}+a^7+1)$$

25. Sea a_n el término n en la sucesión
$$1,3,6,10,15,21,\ldots$$
Considere los 2015 primeros elementos de dicha sucesión. Entre ellos, la cantidad de números que deja residuo 2 al dividirse entre 3 es

   a) 0
   b) 672
   c) 1007
   d) 1343

   Solución:

   Opción correcta: a)

   La clave es notar que los elementos de la sucesión a_n se obtienen al sumarle n al elemento anterior, lo que hace que la sucesión a_n se pueda expresar como
$$a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ahora bien, a_n es divisible entre 3 si n o $n+1$ es divisible entre 3, lo cual ocurre si $n = 3k$ o $n = 3k+2$, para algún k entero positivo. Por lo tanto, a_n solo podría dar residuo distinto a 0 en el caso de que $n = 3k+1$.

Sustituyendo $3k+1$ en la fórmula tenemos que

$$a_{3k+1} = \frac{(3k+1)(3k+2)}{2}.$$

Por lo tanto,

$$a_{3k+1} = \frac{(3k+1)(3k+2)}{2} = \frac{9k^2+9k+2}{2} = \frac{9k(k+1)}{2} + 1.$$

Como el primer sumando es divisible entre 3 tenemos que a_{3k+1} deja residuo 1 siempre al dividirse entre 3 por lo que nunca algún número de (a_n) dejará residuo 2.