XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UCR - UNA - TEC - UNED - MICITT

PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL

III Nivel

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2016

Estimado estudiante:

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 1 de julio, en la siguiente dirección electrónica: **www.olcoma.com**

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2016 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas y le desea los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 25 preguntas de selección única.

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. El denominador que se obtiene al simplificar al máximo la expresión $\dfrac{x+1}{x^2-x} \div \dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2-2x+1}$ es

   (a) x^2

   (b) $x+1$

   (c) $x(x-1)$

   (d) $x^2(x+1)$

2. Considere un triángulo rectángulo ABC recto en A. Si se sabe que $\cos(C) = 0{,}6$ y que la hipotenusa mide 5, entonces el área del triángulo es

   (a) 6

   (b) 7,5

   (c) 10

   (d) 15

3. Un granjero tiene una colección de pavos y conejos. Al contar el total de cabezas y patas de todos los animales obtuvo 60 cabezas y 190 patas. El número de animales que tiene el granjero es

   (a) 27 pavos y 33 conejos

   (b) 19 pavos y 36 conejos

   (c) 21 pavos y 37 conejos

   (d) 25 pavos y 35 conejos

4. El año pasado un pantalón costaba 18000 colones y una camisa 12000 colones. Este año el costo del pantalón aumentó 14 % y el de la camisa 6 %. El porcentaje de aumento en el costo de ambos es

   (a) 10

   (b) 10,8

   (c) 11,5

   (d) 12

5. Si en el $\triangle ABC$ se tiene que $AB = x + 3$, $AC = x$, $BC = \sqrt{11}$ y $\cos A = \dfrac{3}{4}$, entonces AB es

   (a) 1

   (b) 4

   (c) 5

   (d) 8

6. Un posible valor de a para que la ecuación $x^2 + (a-2)x - (a-1)(2a-3) = 0$ tenga dos soluciones reales, donde una es el doble de la otra, es

   (a) $\dfrac{5}{6}$

   (b) $\dfrac{4}{5}$

   (c) $\dfrac{7}{6}$

   (d) $\dfrac{7}{5}$

7. En una prueba de tres preguntas aplicada a 50 personas se tiene que:

   - Todos respondieron al menos una pregunta correcta.
   - El total de preguntas contestadas correctamente fue 100.

   Entonces el máximo número posible de personas que contestaron las tres preguntas de manera correcta es

   (a) 15

   (b) 25

   (c) 33

   (d) 50

8. Si $3 \leq x - 2 \leq 7$ y $7 \leq y + 5 \leq 17$, entonces el menor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{3x - 2y}{x}$ es

   (a) $\dfrac{1}{3}$

   (b) $\dfrac{23}{9}$

   (c) $-\dfrac{9}{5}$

   (d) $-\dfrac{25}{9}$

9. Considere la ecuación $(x-1)(x^2 - x + 1) = n$, donde $n = p^k$, p primo y k entero no negativo. El valor de n que hace que la ecuación tenga al menos una solución entera corresponde a

   (a) 2

   (b) 3

   (c) 4

   (d) 9

10. Sea el $\triangle PQR$ tal que $PQ = 2$, $QR = 3$, $RP = 4$. Si las bisectrices de los ángulos P y Q se intersecan en I, entonces la razón entre el área del $\triangle PIQ$ y el área del $\triangle PQR$ es

   (a) $\dfrac{1}{3}$

   (b) $\dfrac{1}{4}$

   (c) $\dfrac{2}{9}$

   (d) $\dfrac{3}{19}$

11. Si n es el número de dígitos de 2016^{2016}, entonces la cantidad de dígitos de n es

    (a) 3

    (b) 4

    (c) 5

    (d) 6

12. Sea n un entero positivo tal que su mayor divisor positivo distinto de n es 15 veces su menor divisor distinto de 1. La cantidad de enteros n que cumplen esta condición es

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) una infinidad

13. Ana tiene un cupón de 20 % de descuento sobre el total a pagar en una tienda. Ella decide comprar un solo artículo que estaba con 30 % de descuento. Entonces, el descuento total que obtendrá Ana si utiliza el cupón es

    (a) 44 %

    (b) 50 %

    (c) 56 %

    (d) 60 %

14. Sea el $\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$. Sea D en $\overleftrightarrow{AC}$ con $\overline{BD} \perp \overline{AB}$, F en $\overleftrightarrow{BC}$ con $\overline{AF} \perp \overline{AB}$, E el pie de la altura del $\triangle ABC$ sobre $\overline{AB}$. Si $CE = 1$ y $m\angle BAC = 45°$ entonces $\dfrac{AD}{AF}$ es

    (a) $2 - \sqrt{2}$

    (b) $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$

    (c) $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$

    (d) $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$

15. La expresión $\sqrt{\sqrt{11} + \sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{11} - \sqrt{2}}$ es equivalente a

    (a) $\sqrt{11} + 6$

    (b) $\sqrt{22} + 3$

    (c) $2\sqrt{11} + 3$

    (d) $\sqrt{2\sqrt{11} + 6}$

16. La cantidad de números de seis dígitos de la forma $1a2b3c$ que son múltiplos de 15, donde todos los dígitos son diferentes, es

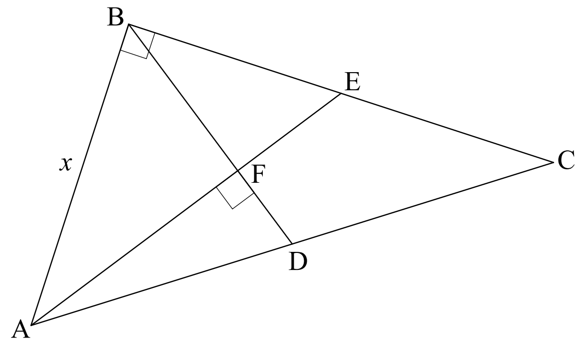
    (a) 12

    (b) 20

    (c) 22

    (d) 24

17. En la figura adjunta, el ΔABC es un triángulo rectángulo recto en B. Las medianas $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ se cortan perpendicularmente en F. Si $AB = x$, entonces AE en términos de x es



(a) $x\sqrt{2}$

(b) $2x\sqrt{2}$

(c) $\dfrac{x\sqrt{5}}{2}$

(d) $\dfrac{x\sqrt{6}}{2}$

18. La cantidad de enteros positivos menores que 50 que tienen exactamente cuatro divisores positivos es

(a) 12

(b) 13

(c) 14

(d) 15

19. Considere el $\square ABCD$ y sea M el punto medio de $\overline{AB}$. Si $AM = BM = BC = AD = 8$ y $DM = CM = 5$, entonces CD corresponde a

(a) 3

(b) $\dfrac{40}{13}$

(c) $\dfrac{25}{8}$

(d) $\dfrac{16}{5}$

20. Antonio y su nieta Beatriz cumplen años el mismo día, el 31 de diciembre. Antonio nació en el año $19ab$ y Beatriz en el año $20ba$, donde a, b representan dígitos. Si al día de hoy la suma de sus edades es 86, la menor diferencia posible entre sus edades es

    (a) 58

    (b) 64

    (c) 65

    (d) 82

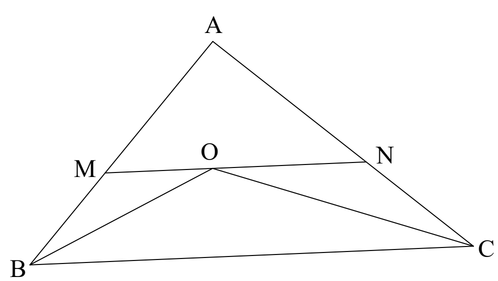
21. En la figura adjunta, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, $\overline{BO}$ biseca al $\angle CBA$ y $\overline{CO}$ biseca al $\angle ACB$. Si $AB = 16$ y $AC = 28$, entonces el perímetro del ΔAMN es

    (a) 30

    (b) 36

    (c) 44

    (d) 56



22. Si se selecciona al azar un número comprendido estrictamente entre 2016 y 4032, la probabilidad que el producto de las cifras del número sea impar es

    (a) $\frac{5}{168}$

    (b) $\frac{12}{403}$

    (c) $\frac{25}{403}$

    (d) $\frac{125}{2016}$

23. En una caja hay 5 bolas de color verde y 9 de color azul, todas del mismo tamaño y peso. Si se sacan 6 bolas al azar, la probabilidad de obtener 2 bolas verdes y 4 bolas azules es

    (a) $\frac{37}{91}$

    (b) $\frac{60}{143}$

    (c) $\frac{151}{273}$

    (d) $\frac{136}{3003}$

24. Sean N y M dos dígitos y considere los dos números de tres dígitos dados por $4N7$ y $52M$. Si se sabe que el producto de estos dos números de tres dígitos es divisible por 36, la cantidad de pares (N, M) que satisfacen la condición es

    (a) 1

    (b) 3

    (c) 5

    (d) 7

25. La cantidad de enteros positivos del 1 al 10^{4025} que cumplen que la suma de sus cifras es dos corresponde a

    (a) 4025000

    (b) 8102325

    (c) 8025000

    (d) 8102324