XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UCR - UNA - TEC - UNED - MICITT

SOLUCIÓN PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL

III Nivel

$(10^{\circ} - 11^{\circ} - 12^{\circ})$

2016

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2016 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas y le desea los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 25 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 1 de julio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. El denominador que se obtiene al simplificar al máximo la expresión $\dfrac{x+1}{x^2-x} \div \dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2-2x+1}$ es

   (a) x^2
   (b) $x+1$
   (c) $x(x-1)$
   (d) $x^2(x+1)$

   - Opción correcta: $d)$
   - Solución: Aplicando los diferentes métodos de factorización se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x^2-x} \div \frac{x^3+2x^2+x}{x^2-2x+1} &= \frac{x+1}{x^2-x} \cdot \frac{x^2-2x+1}{x^3+2x^2+x} \\
&= \frac{x+1}{x(x-1)} \cdot \frac{(x-1)(x-1)}{x(x^2+2x+1)} \\
&= \frac{x+1}{x(x-1)} \cdot \frac{(x-1)(x-1)}{x(x+1)(x+1)} \\
&= \frac{x-1}{x^2(x+1)}
\end{aligned}$$

2. Considere un triángulo rectángulo ABC recto en A. Si se sabe que $\cos(C) = 0{,}6$ y que la hipotenusa mide 5, entonces el área del triángulo es

   (a) 6
   (b) 7,5
   (c) 10
   (d) 15

   - Opción correcta: $a)$
   - Solución: Se tiene que $\cos(C) = 0{,}6 = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$. Así, como la hipotenusa es igual a 5 entonces el cateto $\overline{AC}$ mide 3 (el adyacente al ángulo). Con base en el teorema de Pitágoras se encuentra el valor del otro cateto; así, $AB = 4$ y, por lo tanto, el área del triángulo es $\dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

3. Un granjero tiene una colección de pavos y conejos. Al contar el total de cabezas y patas de todos los animales obtuvo 60 cabezas y 190 patas. El número de animales que tiene el granjero es

   (a) 27 pavos y 33 conejos
   (b) 19 pavos y 36 conejos
   (c) 21 pavos y 37 conejos
   (d) 25 pavos y 35 conejos

   - Opción correcta: $d)$

- Solución: Sea x la cantidad de pavos y y la cantidad de conejos. Por otro lado, se sabe que los pavos tienen 2 patas y los conejos 4 patas. De acuerdo con los datos del enunciado, se debe resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y & = & 60 & (1) \\ \\ 2x+4y & = & 190 & (2) \end{cases}$$

Aplicando el método suma-resta, se multiplica la primera ecuación por -2 y se obtiene

$$\begin{cases} -2x-2y & = & -120 \\ \\ 2x+4y & = & 190 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene que $y=35$. Para determinar el valor de x se sustituye el valor de y en algunas de las ecuaciones (1) o (2), de donde $x=25$. Así el granjero tiene 25 pavos y 35 conejos.

4. El año pasado un pantalón costaba 18000 colones y una camisa 12000 colones. Este año el costo del pantalón aumentó $14\,\%$ y el de la camisa $6\,\%$. El porcentaje de aumento en el costo de ambos es

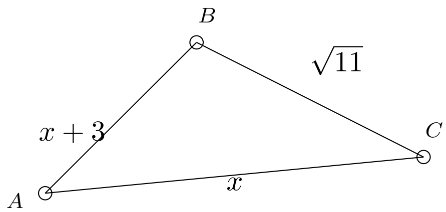
(a) 10
(b) 10,8
(c) 11,5
(d) 12

- Opción correcta: b)
- Solución: Observe que el costo de ambos artículos el año pasado es de 30000 colones. El $14\,\%$ de 1800 colones son 2520 colones y el $6\,\%$ de 12000 colones son 720 colones. El costo de ambos artículos este año es de 33240 colones. La deferencia entre el costo del año pasado y este, en ambos artículos, es 3240 colones. Por lo tanto, el aumento fue de $10{,}8\,\%$.

5. Si en el $\triangle ABC$ se tiene que $AB=x+3$, $AC=x$, $BC=\sqrt{11}$ y $\cos A=\dfrac{3}{4}$, entonces AB es

(a) 1
(b) 4
(c) 5
(d) 8

- Opción correcta: b)
- Solución: Aplicando ley de cosenos:



$$\begin{aligned}
(\sqrt{11})^2 &= (x+3)^2 + x^2 - 2(x+3)x\cos A\\
11 &= x^2 + 6x + 9 + x^2 - 2(x^2+3x)\cdot\frac{3}{4}\\
2 &= 2x^2 + 6x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x\\
0 &= x^2 + 3x - 4\\
0 &= (x+4)(x-1)\\
x &= -4 \text{ o } x = 1.
\end{aligned}$$

Es imposible que $x=-4$ así que $x=1$ y $AB = x+3 = 4$.

6. Sea $a \in \mathbb{R}$. Para que la ecuación $x^2 + (a-2)x - (a-1)(2a-3) = 0$ tenga dos soluciones reales, donde una es el doble de la otra, un posible valor de a es

   (a) $\frac{5}{6}$
   (b) $\frac{4}{5}$
   (c) $\frac{7}{6}$
   (d) $\frac{7}{5}$

   - Opción correcta: d)
   - Solución: El discriminante de la ecuación viene dado por

   $$\triangle = (a-2)^2 + 4(a-1)(2a-3) = (3a-4)^2$$

   y así las soluciones de la ecuación vienen dadas por $x_1 = a-1$ y $x_2 = 3-2a$.
   Como una es el doble de la otra, $x_1 = 2x_2$ o $x_2 = 2x_1$ y así

   $$\begin{array}{cc}
   a-1 = 2(3-2a) & 3-2a = 2(a-1)\\
   a-1 = 6-4a & 3-2a = 2a-2\\
   5a = 7 & 5 = 4a\\
   a = \dfrac{7}{5} & \dfrac{5}{4} = a.
   \end{array}$$

7. En una prueba de tres preguntas aplicada a 50 personas se tiene que:

   - Todos respondieron al menos una pregunta correcta.
   - El total de preguntas contestadas correctamente fue 100.

   Entonces el máximo número posible de personas que contestaron las tres preguntas de manera correcta es

   (a) 15
   (b) 25
   (c) 33

(d) 50

- Opción correcta: b)
- Solución: Sea a el número de personas que contestaron exactamente una pregunta de manera correcta, b el número de personas que contestaron exactamente dos preguntas de manera correcta y c el número de personas que contestaron las tres preguntas de manera correcta. Entonces
  $a+b+c=50 \quad (1) \quad$ y $\quad a+2b+3c=100 \quad (2)$.
  Como $b \geq 0$, despejando a en (1) y sustituyendo en (2) se concluye que
  $$b+2c=50 \Rightarrow 2c=50-b \leq 50 \Rightarrow c \leq 25.$$

8. Si $3 \leq x-2 \leq 7$ y $7 \leq y+5 \leq 17$, el menor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{3x-2y}{x}$ es

   (a) $\dfrac{1}{3}$
   (b) $\dfrac{23}{9}$
   (c) $-\dfrac{9}{5}$
   (d) $-\dfrac{25}{9}$

- Opción correcta: c)
- Solución: Se tiene que $3 \leq x-2 \leq 7 \Rightarrow 5 \leq x \leq 9$ y $7 \leq y+5 \leq 17 \Rightarrow 2 \leq y \leq 12$. Por lo tanto,
  $$\frac{3x-2y}{x}=3-2\cdot\frac{y}{x}$$
  alcanza su menor valor posible cuando $\dfrac{y}{x}$ toma su máximo valor, lo cual ocurre cuando y sea máximo y x sea mínimo, es decir, cuando $y=12$ y $x=5$, por lo que el menor valor es
  $$\frac{3x-2y}{x}=3-2\cdot\frac{y}{x}=3-2\cdot\frac{12}{5}=-\frac{9}{5}.$$

9. Considere la ecuación $(x-1)(x^2-x+1)=n$, donde $n=p^k$, p primo y k entero no negativo. El valor de n que hace que la ecuación tenga al menos una solución entera corresponde a

   (a) 2
   (b) 3
   (c) 4
   (d) 9

- Opción correcta: b)
- Solución: Note que x^2-x+1 solo puede tomar valores positivos dado que su discriminante es menor a cero. Como p es primo entonces $x-1$ y x^2-x+1 deben ser potencias de p y como $x^2-x+1=x(x-1)+1$ entonces $x-1$ y x^2-x+1 son coprimos por lo cual $x^2-x+1=1$ o $x-1=1$.
  Si $x^2-x+1=1$ entonces $x=0$ o $x=1$, pero en ambos casos $x-1$ no podría ser una potencia de p. Entonces $x-1=1$ y así $x=2$. Por lo tanto, $(x-1)(x^2-x+1)=3$.

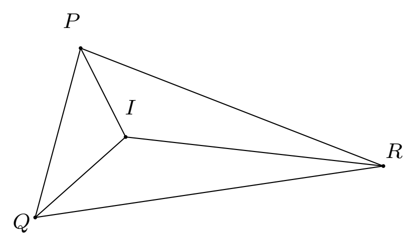
10. Sea el $\triangle PQR$ tal que $PQ = 2$, $QR = 3$, $RP = 4$. Si las bisectrices de los ángulos P y Q se intersecan en I, entonces la razón entre el área del $\triangle PIQ$ y el área del $\triangle PQR$ es

   (a) $\frac{1}{3}$
   (b) $\frac{1}{4}$
   (c) $\frac{2}{9}$
   (d) $\frac{3}{19}$

   - Opción correcta: c)
   - Solución: Como I es el incentro del $\triangle PQR$, entonces $\triangle PRI$, $\triangle IRQ$ y $\triangle PIQ$ poseen la misma altura h. Ahora

$$\frac{(PIQ)}{(PQR)} = \frac{(PIQ)}{(PRI)+(IRQ)+(PIQ)} = \frac{\frac{PQ\cdot h}{2}}{\frac{RP\cdot h}{2}+\frac{QR\cdot h}{2}+\frac{PQ\cdot h}{2}}$$

$$= \frac{\frac{2\cdot h}{2}}{\frac{4\cdot h}{2}+\frac{3\cdot h}{2}+\frac{2\cdot h}{2}} = \frac{h}{\frac{9h}{2}} = \frac{2}{9}$$



11. Si n es el número de dígitos de 2016^{2016}, entonces la cantidad de dígitos de n es

   (a) 3
   (b) 4
   (c) 5
   (d) 6

   - Opción correcta: b)
   - Solución: Observe que $10^3 < 2016 < 10^4 \Rightarrow (10^3)^{2016} < 2016^{2016} < (10^4)^{2016}$, y así

$$10^{6048} < 2016^{2016} < 10^{8064}.$$

   Por lo tanto, n es un valor mayor que 6048 y menor o igual a 8064. Por lo tanto, la cantidad de dígitos de n es 4.

12. Sea n un entero positivo tal que su mayor divisor positivo distinto de n es 15 veces su menor divisor distinto de 1. La cantidad de enteros n que cumplen esta condición es

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) una infinidad

- Opción correcta: c)
- Solución: Sea a el menor divisor positivo de n, entonces $a|n \Rightarrow n = a \cdot k$ con k entero y para que se cumplan las condiciones del problema $k = 15a$ con a distinto de 1 (pues si $a = 1$ se tendría que el mayor divisor positivo de n es n lo cual no es posible).
  Ahora, $n = 15a^2$ y como 3 divide a n (pues $n = 3r$ con r entero) entonces $1 < a \leq 3$ (ya que a es el menor divisor positivo de n). Así, $a = 2$ o $a = 3$ y por lo tanto solo existen 2 enteros.

13. Ana tiene un cupón de 20 % de descuento sobre el total a pagar en una tienda. Ella decide comprar un solo artículo que estaba con 30 % de descuento. Entonces, el descuento total que obtendrá Ana si utiliza el cupón es

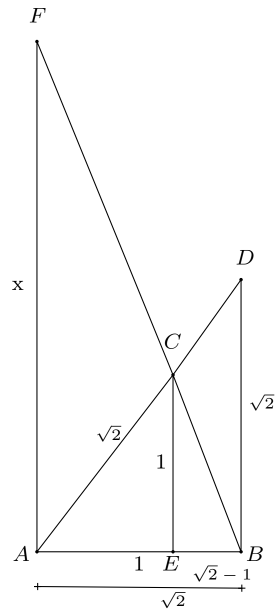
(a) 44 %
(b) 50 %
(c) 56 %
(d) 60 %

- Opción correcta: a)
- Solución: Sea x el precio del artículo. El precio del artículo con el 30 % de descuento es $x - 0,3x = 0,7x$. Ahora, el precio del artículo con el otro 20 % de descuento es $0,7x - 0,2(0,7x) = 0,7x - 0,14x = 0,56x$. Es decir, el costo del artículo después de los dos descuentos es 56 % su valor original, por lo que el descuento es 44 %.

14. Sea el $\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$. Sea D en $\overleftrightarrow{AC}$ con $\overline{BD} \perp \overline{AB}$, F en $\overleftrightarrow{BC}$ con $\overline{AF} \perp \overline{AB}$, E el pie de la altura del $\triangle ABC$ sobre $\overline{AB}$. Si $CE = 1$ y $m\angle BAC = 45°$ entonces $\dfrac{AD}{AF}$ es

(a) $2 - \sqrt{2}$
(b) $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$
(c) $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$
(d) $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$

- Opción correcta: $a)$
- Solución: De acuerdo con los datos del enunciado se tiene la figura adjunta.
  Vemos que $m\angle ACE = 45°$, por lo que $\triangle AEC$ es isósceles y entonces $AE = 1$ y $AC = \sqrt{2} = AB$.
  Como $\triangle ABD$ también es rectángulo isósceles, $BD = \sqrt{2}$ y $AD = 2$.
  Como $\triangle ABF \sim \triangle EBC$, $\dfrac{EC}{AF} = \dfrac{EB}{AB}$, es decir, $\dfrac{1}{AF} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.
  Finalmente $\dfrac{AD}{AF} = AD \cdot \dfrac{1}{AF} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$



15. La expresión $\sqrt{\sqrt{11}+\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$ es equivalente a

   (a) $\sqrt{11}+6$
   (b) $\sqrt{22}+3$
   (c) $2\sqrt{11}+3$
   (d) $\sqrt{2\sqrt{11}+6}$

   - Opción correcta: $d)$
   - Solución:
     Considere $p = \sqrt{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$ y $q = \sqrt{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$, donde $p \cdot q = \sqrt{(\sqrt{11})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{11-2} = 3$.
     Observe que $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = |\sqrt{11}+\sqrt{2}| + 2 \cdot 3 + |\sqrt{11}-\sqrt{2}| = \sqrt{11}+\sqrt{2}+2 \cdot 3 + \sqrt{11} - \sqrt{2} = 2\sqrt{11} + 2 \cdot 3 = 2\sqrt{11}+6$
     Como $p+q$ es un número positivo, se tiene $(p+q)^2 = 2\sqrt{11}+6$, entonces $p+q = \sqrt{2\sqrt{11}+6}$

16. La cantidad de números de seis dígitos de la forma $1a2b3c$ que son múltiplos de 15, donde todos los dígitos son diferentes, es

   (a) 12
   (b) 20
   (c) 22
   (d) 24

   - Opción correcta: $c)$
   - Solución: Para ser múltiplo de 15 debe ser divisible por 5 y por 3. Para ser divisible por 5 el dígito de las unidades debe ser 0 o 5, y para ser divisible por 3 la suma de los dígitos debe ser múltiplo de 3.

I Caso: $c = 0$
$1 + 2 + 3 + a + b + 0 = 6 + a + b = 3k \Rightarrow a + b \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$

Se tienen entonces las siguientes posibilidades $9 = 5+4, 12 = 8+4 = 7+5, 15 = 9+6 = 8+7$, cada una de las cuales genera dos números diferentes, es decir, en el caso $c = 0$ se generan 10 números diferentes.
II Caso: $c = 5$
$1 + 2 + 3 + a + b + 5 = 11 + a + b = 3k \Rightarrow a + b \in \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$
Se tienen entonces las siguientes posibilidades $4 = 0 + 4, 7 = 0 + 7, 10 = 6 + 4, 13 = 9 + 4 = 7 + 6, 16 = 9 + 7$, cada una de las cuales genera dos números diferentes, es decir, en este caso se tienen 12 números diferentes.
En total hay 22 números que cumplen las condiciones.

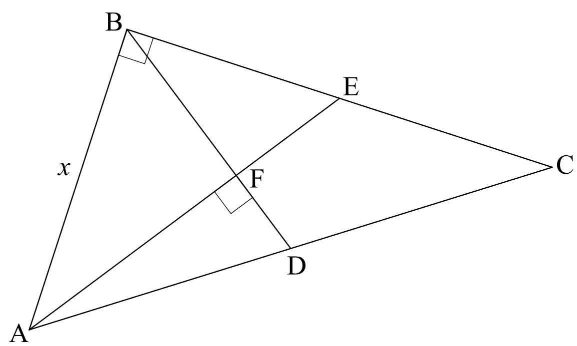
17. En la figura adjunta, el ΔABC es un triángulo rectángulo recto en B. Las medianas $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ se cortan perpendicularmente en F. Si $AB = x$, entonces AE en términos de x es

(a) $x\sqrt{2}$

(b) $2x\sqrt{2}$

(c) $\dfrac{x\sqrt{5}}{2}$

(d) $\dfrac{x\sqrt{6}}{2}$



- Opción correcta: d)
- Solución: Note que F es el punto de intersección de las medianas; es decir, F es el baricentro del ΔABC. Luego, si $FE = y$ entonces $FA = 2y$.
  Los triángulos rectángulos ΔABE y ΔAFB son semejantes (criterio ángulo–ángulo–ángulo); así, $\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow \dfrac{x}{2y} = \dfrac{3y}{x} \Rightarrow x^2 = 6y^2 \Rightarrow x = \sqrt{6}y \Rightarrow y = \dfrac{x\sqrt{6}}{6}$.
  Por lo tanto, $AE = 3y = 3 \cdot \dfrac{x\sqrt{6}}{6} = \dfrac{x\sqrt{6}}{2}$

18. La cantidad de números menores que 50 que tienen exactamente cuatro divisores es

(a) 12
(b) 13
(c) 14
(d) 15

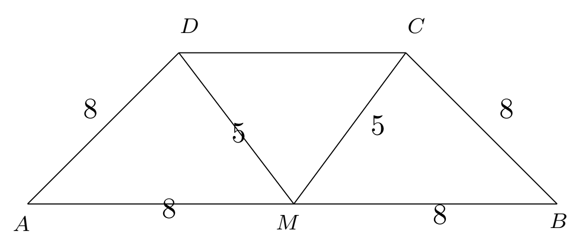
- Opción correcta: d)
- Solución: Si $N = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, la cantidad de divisores está dado por $d = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$. Como se busca $d = 4$ se tienen solamente dos posibilidades: $N = p^{\alpha}$, con $\alpha = 3$ o $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$ con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

I Caso: $N = p^{\alpha}$, con $\alpha = 3$: Como $N < 50$ solo se puede tener $p = 2,\ p = 3$, pues con $p = 5$ se genera $5^3 = 125 > 50$.
II Caso: $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$ con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$: Los primos menores que 25 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Las parejas cuyo producto es menor que 50 son 13:
$(2,3),(2,5),(2,7),(2,11),(2,13),(2,17),(2,19),(2,23)$
$(3,5),(3,7),(3,11),(3,13)$
$(5,7)$
En total hay 15 números que cumple lo pedido.

19. Considere el $\square ABCD$ y sea M el punto medio de $\overline{AB}$. Si $AM = BM = BC = AD = 8$ y $DM = CM = 5$, entonces CD corresponde a

(a) 3
(b) $\dfrac{40}{13}$
(c) $\dfrac{25}{8}$
(d) $\dfrac{16}{5}$

- Opción correcta: c)
- Solución: Considere la figura que se muestra a continuación:



Tenemos que $m\angle AMD + m\angle DMC + m\angle BMC = 180°$, además $\triangle DAM$ isósceles ($DA = AM$) y $\triangle CMB$ isósceles ($CB = MB$).
Tenemos $\triangle DAM \cong \triangle CBM(l-l-l)$ y $\angle CMB \cong \angle BCM \cong \angle AMD \cong \angle MDA$ entonces $m\angle DMC = 180° - m\angle AMD - m\angle CMB = 180° - m\angle AMD - m\angle MDA = m\angle DAM$.
Así $\triangle DAM \sim \triangle DMC$ $(l-a-l)$ y luego

$$\frac{DA}{DM} = \frac{DM}{DC} \Rightarrow \frac{8}{5} = \frac{5}{DC} \Rightarrow DC = \frac{25}{8}.$$

20. Antonio y su nieta Beatriz cumplen años el mismo día, el 31 de diciembre. Antonio nació en el año $19ab$ y Beatriz en el año $20ba$, donde a, b representan dígitos. Si al día de hoy la suma de sus edades es 86, la menor diferencia posible entre sus edades es

(a) 58
(b) 64
(c) 65
(d) 82

- Opción correcta: b)
- Solución: Como este año aún no han cumplido años, la edad de Antonio es

$$2016 - 19ab - 1 = 2015 - (1900 + 10a + b) = 115 - 10a - b$$

y la edad de Beatriz es

$$2016 - 20ba - 1 = 2015 - (2000 + 10b + a) = 15 - 10b - a$$

La suma de sus edades es $130 - 11a - 11b$. Tenemos entonces que $130 - 11a - 11b = 86 \Rightarrow 11a + 11b = 11(a + b) = 44 \Rightarrow a + b = 4$. Por la fecha en que estamos, solo se puede tener $b = 0$ o $b = 1$.
Si $b = 0 \Rightarrow a = 4$, la edad de Antonio será 75 y la de Beatriz 11.
Si $b = 1 \Rightarrow a = 3$, la edad de Antonio será 84 y la de Beatriz 2.
La menor diferencia de sus edades se da en el primer caso, y es $75 - 11 = 64$.

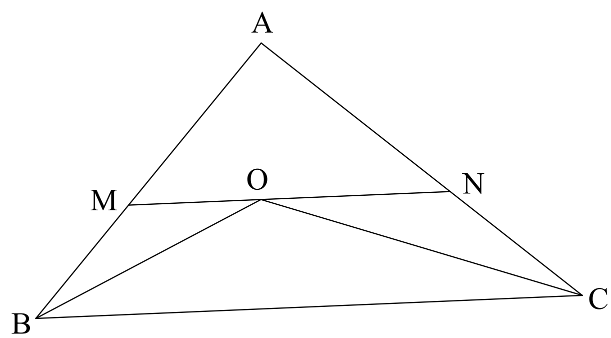
21. En la figura adjunta, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, $\overline{BO}$ biseca al $\angle CBA$ y $\overline{CO}$ biseca al $\angle ACB$. Si $AB = 16$ y $AC = 28$, entonces el perímetro del ΔAMN es

(a) 30

(b) 36

(c) 44

(d) 56



- Opción correcta: c)
- Solución: Como $\overline{BO}$ biseca al $\angle CBA$, entonces $\angle OBC \cong \angle OBM$ y dado que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, los ángulos $\angle MOB$ y $\angle OBC$ son congruentes (por ser ángulos alternos internos entre paralelas). Así, el ΔBMO es isósceles. Si $x = MO \Rightarrow BM = x$.
En forma análoga, como $\overline{CO}$ biseca al $\angle ACB$, entonces $\angle OCB \cong \angle OCN$ y dado que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, los ángulos $\angle NOC$ y $\angle OCN$ son congruentes (por ser ángulos alternos internos entre paralelas). Así, el ΔCNO es isósceles. Si $y = NO \Rightarrow CN = y$.
Por lo tanto, el perímetro del ΔAMN es $AM + MN + NA = (16 - x) + (x + y) + (28 - y) = 16 + 28 = 44$.

22. Si se selecciona al azar un número comprendido estrictamente entre 2016 y 4032, la probabilidad que el producto de las cifras del número sea impar es

(a) $\dfrac{5}{168}$

(b) $\dfrac{12}{403}$

(c) $\dfrac{25}{403}$

(d) $\dfrac{125}{2016}$

- Opción correcta: c)
- Solución: Para que el producto de las cifras sea impar, todas las cifras deben serlo. Por el intervalo que se da, el primer dígito debe ser 3, así que el número debe ser de la forma $N = 3abc$, con $a, b, c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Entonces hay 5 posibilidades para escoger cada uno de los dígitos, por lo que N puede escogerse de $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ formas.

  Por otra parte, la cantidad total de números es $4032 - 2016 - 1 = 2015$, pues no puede ser ni 2016 ni 4032. Entonces la probabilidad es $\dfrac{125}{2015} = \dfrac{25}{403}$.

23. En una caja hay 5 bolas de color verde y 9 de color azul, todas del mismo tamaño y peso. Si se sacan 6 bolas al azar, la probabilidad de obtener 2 bolas verdes y 4 bolas azules es

    (a) $\dfrac{37}{91}$

    (b) $\dfrac{60}{143}$

    (c) $\dfrac{151}{273}$

    (d) $\dfrac{136}{3003}$

- Opción correcta: b)
- Solución: Observe que en la caja hay un total de 14 bolas. El número total de resultados de seleccionar 6 bolas de las 14 sin importar el orden es ${}_{14}C_6 = \dfrac{14!}{6!(14-6)!} = 3003$ maneras.

  Considere el evento E, de que dos bolas sean verdes y cuatro sean azules. Escoger dos bolas verdes de las cinco bolas verdes que hay en la caja puede darse de ${}_5C_2 = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ maneras, mientras que escoger cuatro bolas azules de las nueve bolas azules que hay en la caja puede darse de ${}_9C_4 = \dfrac{9!}{4!(9-4)!} = 126$ maneras. Por lo tanto, el evento E puede ocurrir en $10 \cdot 126 = 1260$ maneras. Entonces, $P(E) = \dfrac{1260}{3003} = \dfrac{60}{143}$.

24. Sean N y M dos dígitos y considere los dos números de tres dígitos dados por $4N7$ y $52M$. Si se sabe que el producto de estos dos números de tres dígitos es divisible por 36, la cantidad de pares (N, M) que satisfacen la condición es

    (a) 1

    (b) 3

    (c) 5

    (d) 7

- Opción correcta: c)
- Solución: Dado que el producto $(4N7)(52M)$ es divisible entre 36, es divisible por 4 y divisible por 9.

  Como $4N7$ es impar, 4 tiene que ser divisor de $52M$; así, luego $2M$ tiene que ser múltiplo de 4: $M = 0, M = 4$ o $M = 8$.

Si $M = 0$, 520 no es divisible por 3 (ni por nueve claro está). Así, para que el producto $(4N7)(520)$ sea divisible por 9 se necesita que $4N7$ sea divisible entre 9; es decir, $4 + N + 7$ debe ser múltiplo de 9, que se logra si $N = 7$. Por lo tanto, $(7, 0)$ es uno de los pares buscados.

Si $M = 4$, 524 no es divisible por 3. Así, para que el producto $(4N7)(524)$ sea divisible por 9 se necesita que $4N7$ sea divisible entre 9; es decir, $4 + N + 7$ debe ser múltiplo de 9, que se logra si $N = 7$. Por lo tanto, $(7, 4)$ es uno de los pares buscados.

Si $M = 8$, 528 es divisible por 3 pero no entre 9. Así, para que el producto $(4N7)(528)$ sea divisible por 9 se necesita que $4N7$ sea divisible entre 3; es decir, $4+N+7$ debe ser múltiplo de 3, que se logra si $N = 1$, $N = 4$ o $N = 7$. Por lo tanto, $(1, 8)$, $(4, 8)$ y $(7, 8)$ son pares que cumplen la condición.

En total, cinco parejas de números cumplen la condición.

25. La cantidad de enteros positivos del 1 al 10^{4025} que cumplen que la suma de sus cifras es dos corresponde a

(a) 4025000

(b) 8102325

(c) 8025000

(d) 8102324

- Opción correcta: b)
- Solución: El 2 y todos los números que empiezan con 2 y poseen ceros en todas las demás posiciones de sus dígitos cumplen la condición (por ejemplo, 20000 y 2000000).

  Cada número está determinado por la cantidad de ceros que tiene al final, que puede ser cualquier número entre 0 y 4024 (para que sea menor que 10^{4025}); de esta manera, hay 4025 números de este tipo.

  El 11 y los números que están formados por dos *unos* y el resto ceros también cumplen la condición (por ejemplo, 10001000 y 100000001); estos números están determinados por la posición de los *unos* en el número.

  Para construir un número de este tipo basta elegir una pareja de números positivos menores o iguales a 4025, que pude hacerse de un total de $\dfrac{4025 \cdot 4024}{2} = 8098300$ maneras.

  Como no hay otro tipo de números que cumplan la condición, en total hay $4025+8098300 = 8102325$ números cuya suma de sus cifras es dos.