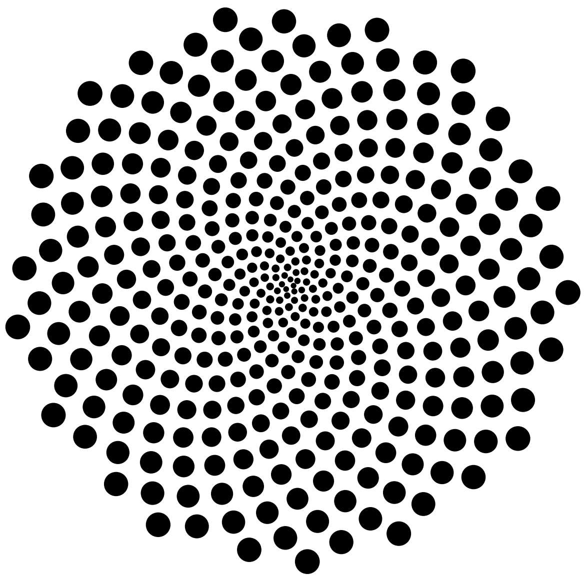
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - UTN - MICITT - UNED - TEC

PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



III Nivel

$(10^{\circ} - 11^{\circ} - 12^{\circ})$

2017

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2017 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 25 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 30 de junio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. Existen números de tres dígitos que tienen la siguiente propiedad: si se remueve el primer dígito, se obtiene un cuadrado perfecto y si se remueve el último dígito, también se obtiene un cuadrado perfecto. La suma de todos los números con esta curiosa propiedad es

   (a) 1013

   (b) 1177

   (c) 1465

   (d) 1993

2. Considere todas las posibles figuras distintas que pueden formarse con tres triángulos rectángulos isósceles congruentes, de manera que cada uno de ellos siempre comparta un lado con alguno de los otros. Si la medida de un cateto es 1 cm, la diferencia en centímetros entre el mayor perímetro y el menor perímetro es

   (a) $3\sqrt{2}$

   (b) $\sqrt{2}-1$

   (c) $2\sqrt{2}-2$

   (d) $3\sqrt{2}-2$

3. En la figura adjunta se muestra un diagrama que se desea completar insertando tres números, uno en cada espacio vacío. Se desea que la suma de los primeros tres números sea 100, que la suma de los tres del medio sea 200 y que la suma de los tres últimos sea 300. El número que debe insertarse en el centro del diagrama es

   (a) 50

   (b) 60

   (c) 70

   (d) 80

10				130

4. Un juego de mesa consiste en seleccionar 22 cartas en las que se han escrito enteros positivos desde el 1 al 22 y tomar parejas para formar fracciones. La mayor cantidad de estas fracciones que pueden ser enteras es

   (a) 7

   (b) 9

   (c) 10

   (d) 11

5. Al factorizar la expresión $6x^4y^4 + \sqrt{3}x^2y^2zw - 3z^2w^2$, uno de los factores es

   (a) $2x^2y^2 + 3zw$

   (b) $3x^2y^2 + \sqrt{3}zw$

   (c) $2x^2y^2 - \sqrt{3}zw$

   (d) $2x^2y^2 + \sqrt{3}zw$

6. La cantidad de divisores que tiene el número 2017^{2017} que son cubos perfectos es

   (a) 672

   (b) 673

   (c) 2016

   (d) 2017

7. En un $\triangle ABC$ se tiene que $AB = 3$, $AC = 2\sqrt{2}$ y $m\angle BAC = 45°$. Si $m\angle ABC = \beta$, entonces $\cos\beta$ es

   (a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

   (b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   (c) $2\sqrt{2}$

   (d) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

8. La cantidad de números de tres dígitos distintos, tales que el producto de sus dígitos sea un cuadrado perfecto es

   (a) 36

   (b) 102

   (c) 174

   (d) 180

9. En una institución de educación secundaria de Costa Rica, se decidió nombrar a 31 de sus estudiantes para que integren las tres delegaciones que participarán en Olimpiadas Nacionales de Matemática, Química y Biología, respectivamente. Las delegaciones se conformaron de tal manera que hay dos estudiantes en Biología y Matemática a la vez, hay tres estudiantes en Química y Matemática a la vez, hay cuatro estudiantes en Biología y Química a la vez, y solo un estudiante participa en las tres delegaciones a la vez. Si se sabe que los estudiantes que son integrantes de una única delegación se distribuyen equitativamente entre las tres delegaciones, entonces el número de miembros de la delegación de Matemática es

   (a) 8

   (b) 12

   (c) 13

   (d) 14

10. El valor de la expresión $\dfrac{2017^3 - 1}{1 + 2017^2 + 2018^2}$ es

   (a) 1007

   (b) 1008

   (c) 2016

   (d) 2017

11. En un juego se colocan fichas en una cuadrícula $n \times n$ y al seleccionar, sin quitar, una ficha cualquiera se eliminan todas las que están alineadas con ella, tanto horizontal, vertical y diagonalmente. Si el tablero es de 1000×1000, la cantidad máxima de fichas que pueden eliminarse al seleccionar una casilla es

   (a) 3993

   (b) 3994

   (c) 3995

   (d) 3996

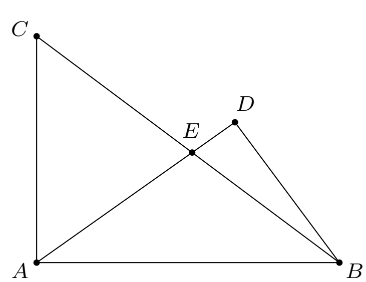
12. En la figura adjunta se tiene que el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $m\angle BAC = 90°$, el $\triangle ADB$ es también un triángulo rectángulo con $m\angle ADB = 90°$, E es el punto de intersección de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. Si $AC = 15\,\text{cm}$, $AD = 16$ cm. y $BD = 12$ cm, entonces el área del $\triangle ABE$, en centímetros cuadrados, es

   (a) 50

   (b) 75

   (c) 100

   (d) 150



13. Cinco enteros se escriben en círculo de forma que no haya dos o tres números consecutivos cuya suma sea múltiplo de tres. La cantidad de esos cinco números que son divisibles por tres es

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) 3

14. Sofía apostó contra Ana que al tirar tres monedas si salían más escudos que coronas ella ganaba y si salían más coronas que escudos ganaba Ana. Si la probabilidad de salir escudo en una moneda es $\frac{1}{2}$, en otra es $\frac{2}{3}$ y en la otra es $\frac{1}{4}$, entonces la probabilidad que tiene Ana de ganar es

    (a) $\frac{9}{24}$

    (b) $\frac{11}{24}$

    (c) $\frac{13}{24}$

    (d) $\frac{15}{24}$

15. Sea el $\triangle ABC$ en el que la mediana desde A es perpendicular a la mediana desde B. Si $BC = 7$ y $AC = 6$, entonces AB es

    (a) 4

    (b) $2\sqrt{5}$

    (c) $\sqrt{17}$

    (d) $\frac{9}{2}$

16. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - 3y = a \\ mx + y = b \end{cases}$ en el que $a, b, m \in \mathbb{R}$. Con certeza, siempre se cumple que el sistema

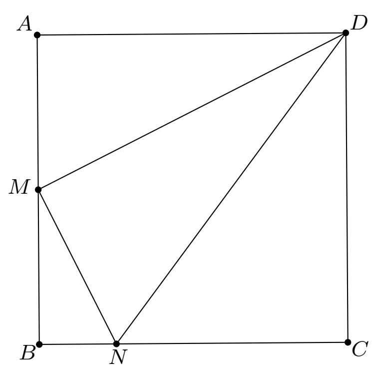
    (a) no tiene solución si $m < 0$

    (b) tiene solución única si $m > 1$

    (c) tiene infinitas soluciones si $a = b = 0$

    (d) tiene solución para cualesquiera valores a y b

17. En la figura adjunta, el $\square ABCD$ es cuadrado de 4 cm^2 de área, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{MN} \perp \overline{MD}$, con $B - N - C$. El área en cm^2 del $\triangle DMN$ es



    (a) $\dfrac{5}{2}$

    (b) $\dfrac{5}{4}$

    (c) $\dfrac{4}{3}$

    (d) $\dfrac{4}{5}$

18. En una fiesta se sabe que todas las personas se saludaron entre sí y que hubo 190 saludos. La cantidad de personas que asistieron a la fiesta es

    (a) 17

    (b) 18

    (c) 19

    (d) 20

19. Considere los números de la forma

$$1 \cdot a_1 + 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \cdots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot a_n$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son enteros, tales que $0 \leq a_k \leq k$. Al expresar 2017 de esa forma, la suma de los coeficientes $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ es

(a) 9

(b) 10

(c) 11

(d) 12

20. En el $\triangle ABC$, $m\angle BAC = 60°$, $m\angle ABC = 45°$ y $AC = 30$. Si h es la longitud de la altura desde A y $h^2 = m + n\sqrt{3}$, con m y n números naturales, entonces el valor de m es

(a) 225

(b) 450

(c) 675

(d) 900

21. Si a y b son las soluciones reales de la ecuación $x^2 - 7x + 3 = 0$, entonces $2ab - a - b$ es una solución de

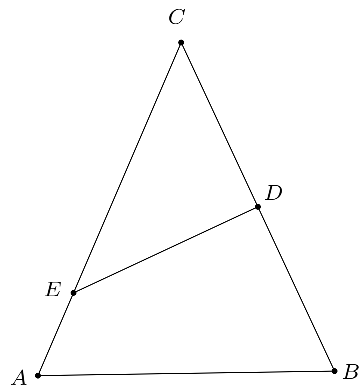
(a) $x^4 + 2x^2 + x + 2$

(b) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x$

(c) $x^4 - 2x^2 - 3x - 2$

(d) $x^4 - 2x^2 - 3$

22. En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles con $CB = CA = 8$ cm, $A - E - C$, $C - D - B$, $\overline{DE}$ es la mediatriz del $\triangle ABC$ correspondiente con $\overline{BC}$. Si se tiene que $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{1}{3}$, entonces el área en cm^2 del $\triangle ABC$ es



(a) $8\sqrt{5}$

(b) $12\sqrt{5}$

(c) $\dfrac{16\sqrt{5}}{3}$

(d) $\dfrac{32\sqrt{5}}{3}$

23. Sean a y b números reales positivos, tales que $a^2 - b^2 = 2$. Una solución de la ecuación

$$\sqrt{\frac{4a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4} = \left(\frac{a-b}{b}\right)x + \frac{b}{a}$$

es

(a) $a - b$

(b) $a + b$

(c) $a\,(a - b)$

(d) $a\,(a + b)$

24. La cantidad de pares de enteros positivos (a, b) que cumplen que $a + 3b < 100$ y que $a + b$ divide a $a^2 + ab + 2b$ es

    (a) 50

    (b) 49

    (c) 25

    (d) 24

25. Sea $\square ABCD$ un cuadrado, E y F los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Si G es la intersección de $\overline{DF}$ con $\overline{CE}$, entonces $\dfrac{EG}{GC}$ es

    (a) 2

    (b) $\dfrac{5}{2}$

    (c) $\dfrac{1}{3}$

    (d) $\dfrac{3}{2}$