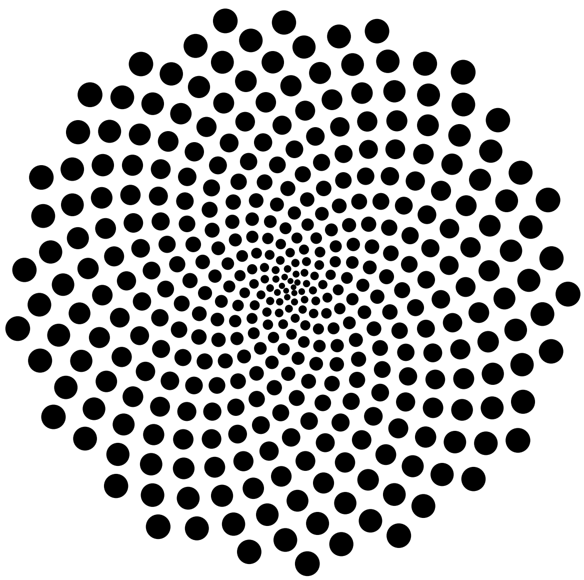
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - UTN - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



III Nivel

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2017

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2017 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 25 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 30 de junio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. Existen números de tres dígitos que tienen la siguiente propiedad: si se remueve el primer dígito, se obtiene un cuadrado perfecto y si se remueve el último dígito, también se obtiene un cuadrado perfecto. La suma de todos los números con esta curiosa propiedad es

   (a) 1013

   (b) 1177

   (c) 1465

   (d) 1993

- Opción correcta: d
- Solución:

  Los cuadrados perfectos de dos dígitos son 16, 25, 36, 49, 64 y 81, por lo tanto, tódos los números que cumplen esta propiedad son 164, 364, 649 y 816, que suman 1993.

2. Considere todas las posibles figuras distintas que pueden formarse con tres triángulos rectángulos isósceles congruentes, de manera que cada uno de ellos siempre comparta un lado con alguno de los otros. Si la medida de un cateto es 1 cm, la diferencia en centímetros entre el mayor perímetro y el menor perímetro es

   (a) $3\sqrt{2}$

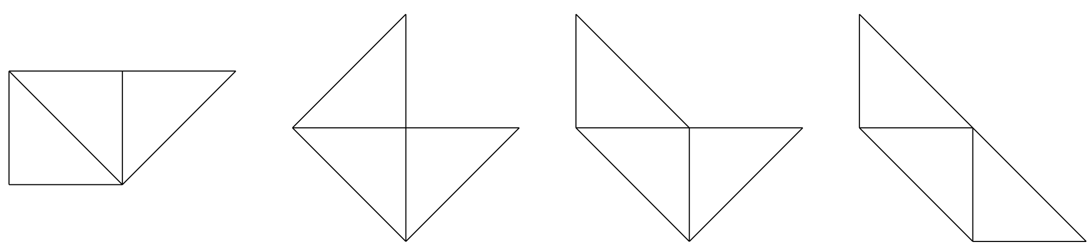
   (b) $\sqrt{2}-1$

   (c) $2\sqrt{2}-2$

   (d) $3\sqrt{2}-2$

- Opción correcta: c
- Solución:

  Las posibles figuras, sin contar simetrías ni rotacón, son las siguientes.



Se observa que el mayor perímetro es $2+3\sqrt{2}$ y el menor es $4+\sqrt{2}$, por lo que la diferencia es $2\sqrt{2}-2$

3. En la figura adjunta se muestra un diagrama que se desea completar insertando tres números, uno en cada espacio vacío. Se desea que la suma de los primeros tres números sea 100, que la suma de los tres del medio sea 200 y que la suma de los tres últimos sea 300. El número que debe insertarse en el centro del diagrama es

   (a) 50

   (b) 60

   (c) 70

   (d) 80

10				130

- Opción correcta: b
- Solución:

Asumamos que los números que no están en el diagrama son A, B y C de la siguiente manera:

10	A	B	C	130

Con estos datos se concluye que

$$\begin{aligned} 10 + A + B &= 100 \\ A + B + C &= 200 \\ B + C + 130 &= 300 \end{aligned}$$

* De la primera ecuación se tiene que $A + B = 90$, y de la segunda se obtiene que $B + C = 170$. Sumando estos resultados, se obtiene $A + 2B + C = 260$. Ahora, nótese que

$$B = (A + 2B + C) - (A + B + C) = 260 - 200 = 60$$

* Alternativo
De la primera ecuación se tiene que $A + B = 90$, y sustituyendo esto en la segunda ecuación se obtiene que $C = 110$. Al sustituir C en la tercera ecuación se obtiene $B = 60$, que es el valor buscado.

4. Un juego de mesa consiste en seleccionar 22 cartas en las que se han escrito enteros positivos desde el 1 al 22 y tomar parejas para formar fracciones. La mayor cantidad de estas fracciones que pueden ser enteras es

   (a) 7

   (b) 9

   (c) 10

   (d) 11

- Opción correcta: c
- Solución:

  Existen 3 números primos mayores que 11, estos son 13, 17 y 19 por lo que se puede utilizar uno de ellos con el número 1, y los otros dos se pueden tomar como una pareja de manera que solo quede una fracción no entera, las demás cartas es posible elegirlas de manera que formen fracciones que sean enteras, por que se tiene 10 parejas máximo.

  Por ejemplo, se puede tomar $\dfrac{17}{19}$ como la fracción no entera, y luego

$$\frac{13}{1}, \frac{22}{11}, \frac{21}{3}, \frac{20}{10}, \frac{18}{9}, \frac{16}{8}, \frac{15}{5}, \frac{14}{7}, \frac{12}{6}, \frac{4}{2}$$

5. Al factorizar la expresión $6x^4y^4 + \sqrt{3}x^2y^2zw - 3z^2w^2$,
uno de los factores es

   (a) $2x^2y^2 + 3zw$

   (b) $3x^2y^2 + \sqrt{3}zw$

   (c) $2x^2y^2 - \sqrt{3}zw$

   (d) $2x^2y^2 + \sqrt{3}zw$

- Opción correcta: d

- Solución:
  Observe que

$$6x^4y^4 + \sqrt{3}x^2y^2zw - 3z^2w^2 = (3x^2y^2 - \sqrt{3}zw)(2x^2y^2 + \sqrt{3}zw)$$

6. La cantidad de divisores que tiene el número 2017^{2017}
   que son cubos perfectos es

   (a) 672

   (b) 673

   (c) 2016

   (d) 2017

- Opción correcta: b

- Solución:

  Primero observemos que 2017 es primo, entonces para que un número sea cubo perfecto y divisor de $N = 2017^{2017}$ debe ser de la forma 2017^a, con $a = 3k$ y $0 \leq a \leq 2017$, es decir, $0 \leq 3k \leq 2017$. Como 2017 no es múltiplo de 3, se tiene $0 \leq 3k \leq 2016$ de donde $0 \leq k \leq 672$. Como se incluye el cero, n puede tomar 673 valores.

7. En un $\triangle ABC$ se tiene que $AB = 3$, $AC = 2\sqrt{2}$ y $m\angle BAC = 45°$. Si $m\angle ABC = \beta$, entonces $\cos\beta$ es

   (a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

   (b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

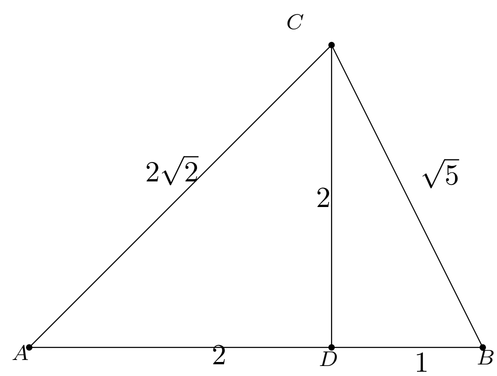
   (c) $2\sqrt{2}$

   (d) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

- Opción correcta: a
- Solución:

Sea D el pie de la perpendicular desde C sobre $\overline{AB}$. Se tiene entonces que $\triangle ADC$ es rectángulo isósceles, por lo que $AD = DC = 2$.

Luego $DB = AB - AD = 1$ y como $\triangle BDC$ es rectángulo, por Pitágoras se tiene que $BC = \sqrt{5}$. Entonces $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$



8. La cantidad de números de tres dígitos distintos, tales que el producto de sus dígitos sea un cuadrado perfecto es

   (a) 36

   (b) 102

   (c) 174

   (d) 180

- Opción correcta: d
- Solución:

  Analizaremos dos casos:

  I Caso: alguno de los dígitos es cero.

  En este caso el producto de los dígitos siempre será cero, el cual es cuadrado perfecto. Hay dos posibilidades para escoger el dígito cero (el dígito de las unidades o el de las decenas); para el dígito de las centenas hay 9 posibilidades y para el otro dígito no nulo hay 8 posibilidades. Entonces la cantidad total en este caso es $2 \cdot 8 \cdot 9 = 144$

  II Caso: ninguno de los dígitos es cero.

  Para que dados tres dígitos distintos su producto sea cuadrado perfecto, este debe estar formado únicamente por potencias de 2 o de 3. Con esto se descartan los cuadrados 25, 47, 100, 121. También se descartan 4 y 9 pues se debería repetir un dígito. Quedan únicamente 6 posibilidades:
  $16 = 2^4 = 1 \cdot 2 \cdot 8$
  $36 = 2^2 \cdot 3^2 = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 6$
  $64 = 2^6 = 2 \cdot 4 \cdot 8$
  $144 = 2^4 \cdot 3^2 = 2 \cdot 8 \cdot 9 = 3 \cdot 6 \cdot 8$

  Para cada uno de ellos hay $3! = 6$ maneras de ordenarlos para formar números de tres dígitos, por lo que en total hay $6 \cdot 6 = 36$ formas en este caso.

  En total hay $144 + 36 = 180$ números que cumplen lo pedido.

9. En una institución de educación secundaria de Costa Rica, se decidió nombrar a 31 de sus estudiantes para que integren las tres delegaciones que participarán en Olimpiadas Nacionales de Matemática, Química y Biología, respectivamente. Las delegaciones se conformaron de tal manera que hay dos estudiantes en Biología y Matemática a la vez, hay tres estudiantes en Química y Matemática a la vez, hay cuatro estudiantes en Biología y Química a la vez, y solo un estudiante participa en las tres delegaciones a la vez. Si se sabe que los estudiantes que son integrantes de una única delegación se distribuyen equitativamente entre las tres delegaciones, entonces el número de miembros de la delegación de Matemática es

   (a) 8

   (b) 12

   (c) 13

   (d) 14

- Opción correcta: b
- Solución:

  Hay 2 estudiantes en Biología y Matemática a la vez y un estudiante participa en las tres delegaciones a la vez, por lo que $2 - 1 = 1$ estudiante participa exclusivamente en Biología y Matemática.

  Hay 3 estudiantes en Química y Matemática a la vez y un estudiante participa en las tres delegaciones a la vez, por lo que $3 - 1 = 2$ estudiantes participan exclusivamente en Química y Matemática. Hay 4 estudiantes en Biología y Química a la vez y un estudiante participa en las tres delegaciones a la vez, por lo que $4 - 1 = 3$ estudiantes participan exclusivamente en Biología y Química.

  Así, quedan $31 - 1 - 1 - 2 - 3 = 24$ estudiantes que integran una sola delegación a la vez. Como los estudiantes que son integrantes de una única delegación, se distribuyen equitativamente entre las tres delegaciones, hay $24 \div 3 = 8$ integrantes exclusivos en cada delegación.

  Finalmente, el número de miembros de la delegación de Matemática es $8 + 1 + 1 + 2 = 12$.

10. El valor de la expresión $\dfrac{2017^3 - 1}{1 + 2017^2 + 2018^2}$ es

    (a) 1007

    (b) 1008

    (c) 2016

    (d) 2017

- Opción correcta: b

- Solución:

  Observe que

  $$\frac{x^3 - 1}{1 + x^2 + (x+1)^2} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{2(x^2+x+1)} = \frac{x-1}{2}$$

  Luego, con $x = 2017$ se obtiene que

  $$\frac{2017^3 - 1}{1 + 2017^2 + 2018^2} = \frac{2017 - 1}{2} = 1008$$

11. En un juego se colocan fichas en una cuadrícula $n \times n$ y al seleccionar, sin quitar, una ficha cualquiera se eliminan todas las que están alineadas con ella, tanto horizontal, vertical y diagonalmente. Si el tablero es de 1000×1000, la cantidad máxima de fichas que pueden eliminarse al seleccionar una casilla es

    (a) 3993

    (b) 3994

    (c) 3995

    (d) 3996

- Opción correcta: c
- Solución:

  Observamos que la mayor cantidad de fichas se elimina al seleccionar cualquiera de las cuatro casillas centrales, ahí se cancelan $(n-1)$ fichas de la fila, $(n-1)$ de la columna, $(n-1)$ de la diagonal mayor, además de $(n-2)$ de la diagonal menor, es decir, $3(n-1)+(n-2)=4n-5$.

  Para $n = 1000$ se tiene $4 \times 1000 - 5 = 3995$.

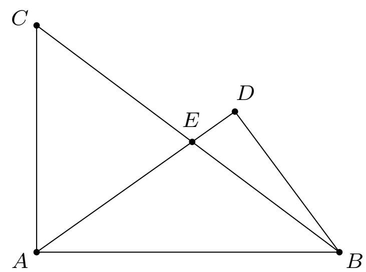
12. En la figura adjunta se tiene que el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $m\angle BAC = 90°$, el $\triangle ADB$ es también un triángulo rectángulo con $m\angle ADB = 90°$, E es el punto de intersección de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. Si $AC = 15\,\text{cm}$, $AD = 16$ cm. y $BD = 12$ cm, entonces el área del $\triangle ABE$, en centímetros cuadrados, es

    (a) 50

    (b) 75

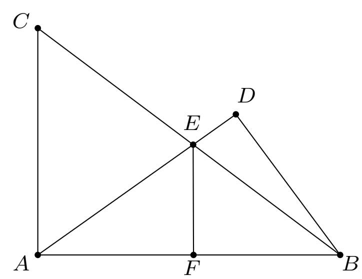
    (c) 100

    (d) 150



- Opción correcta: b
- Solución:

  De acuerdo con la información dada, considere la siguiente figura:



Por el Teorema Pitágoras, se tiene que: $AB = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20\,cm$.

Observe que $\triangle ABC \sim \triangle DAB$ por el criterio de semejanza lado-ángulo-lado, pues $\dfrac{AB}{DA} = \dfrac{AC}{DB}$. Entonces, $m\angle BAE = m\angle ABE$ y por lo tanto $\triangle ABE$ es isósceles.

Se traza la altura del $\triangle ABE$ que interseca al segmento $\overline{AB}$ en el punto F, $AF = FB = 10\,cm$.

Por otro lado, $\triangle BFE \sim \triangle BAC$ por el criterio de semejanza ángulo-ángulo. Entonces, $\dfrac{FE}{AC} = \dfrac{BF}{BA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow FE = \dfrac{15}{2}\,cm$.

Por lo tanto, el área del triángulo $(AEB) = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot FE = \dfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot \dfrac{15}{2} = 75\,cm^2$.

13. Cinco enteros se escriben en círculo de forma que no haya dos o tres números consecutivos cuya suma sea múltiplo de tres. La cantidad de esos cinco números que son divisibles por tres es

   (a) 0

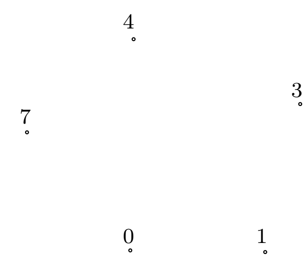
   (b) 1

   (c) 2

   (d) 3

- Opción correcta: c

- Solución:
  Si hubiera tres múltiplos de 3, en cualquier caso quedarían dos consecutivos.
  Si hubiera solo un múltiplo de 3 va a estar a la par de uno de la forma $3a+1$ o $3b+2$ y no pueden quedar dos distintos seguidos, pues su suma $(3a+1)+(3a+2)=6a+3=3(2a+1)$ es múltiplo de 3. Entonces tendrían que quedar tres seguidos del mismo tipo y su suma es múltiplo de 3. $(3a+1)+(3a+1)+(3a+1)$ ó $(3a+2)+(3a+2)+(3a+2)$



  Si no hay múltiplos de 3 los números son de la forma $3a+1$ o $3b+2$ y es análogo al caso anterior.
  Por lo tanto, el único caso posible es cuando hay solo dos múltiplos de 3 (ver figura adjunta).

14. Sofía apostó contra Ana que al tirar tres monedas si salían más escudos que coronas ella ganaba y si salían más coronas que escudos ganaba Ana. Si la probabilidad de salir escudo en una moneda es $\frac{1}{2}$, en otra es $\frac{2}{3}$ y en la otra es $\frac{1}{4}$, entonces la probabilidad que tiene Ana de ganar es

    (a) $\frac{9}{24}$

    (b) $\frac{11}{24}$

    (c) $\frac{13}{24}$

    (d) $\frac{15}{24}$

- Opción correcta: *c*
- Solución:

  Primero ordenamos la probabilidad que tiene cada moneda de sali escudo o corona:

Moneda	1	2	3
Escudo	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$
Corona	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$

  Veamos las posibles combinaciones de resultados, hay 8 posibles combinaciones, de las cuales las primeras 4 son los casos en que Ana gana, cuando salen más coronas que escudos:

1	C	C	C	E	C	E	E	E
2	C	C	E	C	E	C	E	E
3	C	E	C	C	E	E	C	E

  De acuerdo a la primera tabla, las probabilidades de cada uno de estos casos es:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{13}{24}$$

  .

15. Sea el $\triangle ABC$ en el que la mediana desde A es perpendicular a la mediana desde B. Si $BC = 7$ y $AC = 6$, entonces AB es

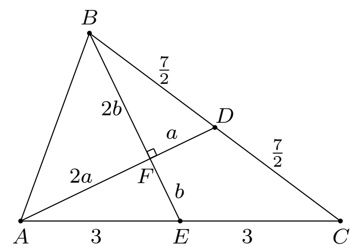
    (a) 4

    (b) $2\sqrt{5}$

    (c) $\sqrt{17}$

    (d) $\dfrac{9}{2}$

- Opción correcta: c
- Solución: Considere la figura



F es el baricentro.

Aplicando Pitágoras en el $\triangle AFE$ se tiene que $4a^2 + b^2 = 9$.

Aplicando Pitágoras en el $\triangle BFD$ se tiene que $a^2 + 4b^2 = \frac{49}{4}$.

Sumando ambas ecuaciones se tiene que $5a^2 + 5b^2 = \frac{85}{4}$ de donde $4a^2 + 4b^2 = 17$.

Ahora, aplicando Pitágoras en el $\triangle AFB$ se tiene que

$$AB^2 = 4a^2 + 4b^2 \Rightarrow AB^2 = 17 \Rightarrow AB = \sqrt{17}$$

16. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - 3y = a \\ mx + y = b \end{cases}$ en el que $a, b, m \in \mathbb{R}$. Con certeza, siempre se cumple que el sistema

    (a) no tiene solución si $m < 0$

    (b) tiene solución única si $m > 1$

    (c) tiene infinitas soluciones si $a = b = 0$

    (d) tiene solución para cualesquiera valores a y b

- Opción correcta: b

- Solución:

  De la primera ecuación, $x = a + 3y$. Sustituyendo este resultado en la segunda ecuación se tiene

$$\begin{aligned} & m\,(a+3y) + y = b \\ \Rightarrow \quad & ma + 3my + y = b \\ \Rightarrow \quad & (3m+1)\,y = b - ma \\ \Rightarrow \quad & y = \frac{b - ma}{3m+1} \end{aligned}$$

  El sistema posee solución única siempre que $m \neq \dfrac{-1}{3}$ y de las afirmaciones solo la segunda se cumple siempre.

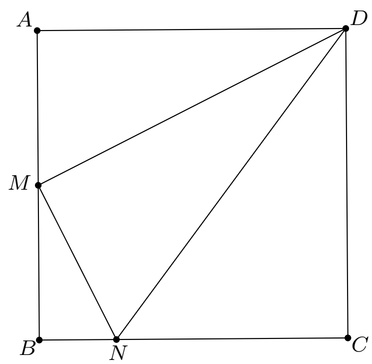
17. En la figura adjunta, el $\square ABCD$ es cuadrado de 4 cm^2 de área, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{MN} \perp \overline{MD}$, con $B - N - C$. El área en cm^2 del $\triangle DMN$ es

    (a) $\dfrac{5}{2}$

    (b) $\dfrac{5}{4}$

    (c) $\dfrac{4}{3}$

    (d) $\dfrac{4}{5}$



- Opción correcta: b

- Solución:

  Como $\square ABCD$ es un cuadrado de 4 cm^2 de área, cada uno de sus lados mide 2 cm. Si $x = BN$, se tiene que $NC = 2 - x$.

  En el $\triangle AMD$ y utilizando el teorema de Pitágoras, $MD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

  En el $\triangle BMN$ y utilizando el teorema de Pitágoras, $MN = \sqrt{x^2 + 1}$.

  En el $\triangle CND$ y utilizando el teorema de Pitágoras, $ND = \sqrt{4 + (2 - x)^2}$.

  Así, el teorema de Pitágoras aplicado en el $\triangle MND$ indica que

$$
\begin{aligned}
& 5 + x^2 + 1 = 4 + (2 - x)^2 \\
\Rightarrow\ & 6 + x^2 - 4 = 4 - 4x + x^2 \\
\Rightarrow\ & 2 - 4 = -4x \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{2} = x \\
\Rightarrow\ & MN = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}}
\end{aligned}
$$

  Luego, el área del $\triangle DMN$ es $\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{5}{4}$.

18. En una fiesta se sabe que todas las personas se saludaron entre sí y que hubo 190 saludos. La cantidad de personas que asistieron a la fiesta es

    (a) 17

    (b) 18

    (c) 19

    (d) 20

- Opción correcta: d
- Solución:

  Sea n el número de personas. Para que se dé un saludo se necesitan 2 personas y el número de saludos distintos es igual a las combinaciones de n tomadas de 2 en 2, es decir, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
  Así, $\dfrac{n(n-1)}{2} = 190$ de donde $n^2 - n = 380 \Rightarrow n^2 - n - 380 = 0 \Rightarrow (n-20)(n+19) = 0$, con lo cual $n = 20$ o $n = -19$. Por lo tanto, asistieron 20 personas a la fiesta.

19. Considere los números de la forma

$$1 \cdot a_1 + 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \cdots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot a_n$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son enteros, tales que $0 \leq a_k \leq k$. Al expresar 2017 de esa forma, la suma de los coeficientes $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ es

(a) 9

(b) 10

(c) 11

(d) 12

- Opción correcta: c
- Solución:

Notese que $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot = 5040 > 2017$, así que

$$2017 = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a_5 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot a_6$$

Es decir $2017 = a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 24a_4 + 120a_5 + 720a_6$.

Es claro que $a_1 = 1$ y $a_6 = 2$, entonces se tiene que

$576 = 2a_2 + 6a_3 + 24a_4 + 120a_5$, y ahora se tiene que $a_5 = 4$, entonces

$96 = 2a_2 + 6a_3 + 24a_4$ y entonces $a_2 = a_3 = 0$ y $a_4 = 4$.

$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1 + 0 + 0 + 4 + 4 + 2 = 11$.

20. En el $\triangle ABC$, $m\angle BAC = 60°$, $m\angle ABC = 45°$ y $AC = 30$. Si h es la longitud de la altura desde A y $h^2 = m + n\sqrt{3}$, con m y n números naturales, entonces el valor de m es

    (a) 225

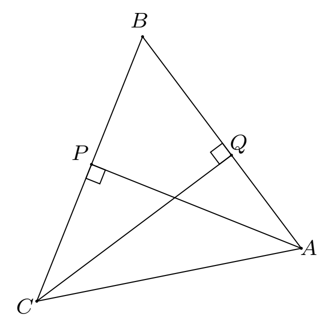
    (b) 450

    (c) 675

    (d) 900

- Opción correcta: b

- Solución:
  Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde A yC respectivamente.
  Como $m\angle B = 45°$ entonces $m\angle BCQ = 45°$ (triángulo rectángulo isósceles) y $m\angle QCA = 30°$ (pues $m\angle A = 60°$ y $\triangle ACQ$ es rectángulo).
  Ahora, como $AC = 30$ se sigue que $CQ = 15\sqrt{3}$ y $AQ = 15$ (Triángulo especial $30°, 60°$). Además, $QB = 15\sqrt{3}$, (Triángulo especial $45°$) por lo que $AB = 15 + 15\sqrt{3}$.



  También, como $\triangle APB$ es rectángulo isósceles y $AP = h$, entonces $AB = h\sqrt{2}$ (Triángulo especial $45°$). Así, $h\sqrt{2} = 15 + 15\sqrt{3} \Rightarrow (h\sqrt{2})^2 = (15 + 15\sqrt{3})^2 \Rightarrow h^2 = 450 + 225\sqrt{3}$. Por lo tanto, $m = 450$.

21. Si a y b son las soluciones reales de la ecuación $x^2 - 7x + 3 = 0$, entonces $2ab - a - b$ es una solución de

    (a) $x^4 + 2x^2 + x + 2$

    (b) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x$

    (c) $x^4 - 2x^2 - 3x - 2$

    (d) $x^4 - 2x^2 - 3$

- Opción correcta: c
- Solución:
  Se tiene $x^2 - 7x + 3 = (x - a)(x - b)$, entonces $ab = 3$ y $a + b = 7$, por lo tanto $2ab - a - b = -1$.
  De las opciones la única que al evaluar -1 da como resultado 0 es la (c).

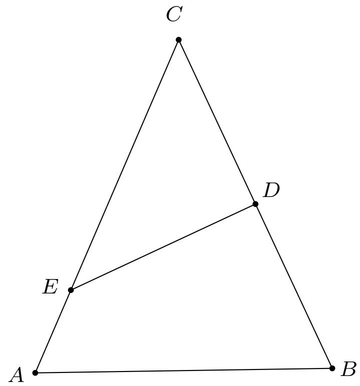
22. En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles con $CB = CA = 8$ cm, $A - E - C$, $C - D - B$, $\overline{DE}$ es la mediatriz del $\triangle ABC$ correspondiente con $\overline{BC}$. Si se tiene que $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{1}{3}$, entonces el área en cm^2 del $\triangle ABC$ es

(a) $8\sqrt{5}$

(b) $12\sqrt{5}$

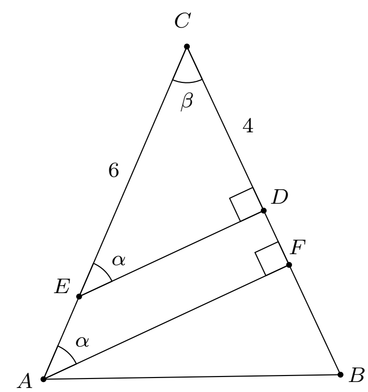
(c) $\dfrac{16\sqrt{5}}{3}$

(d) $\dfrac{32\sqrt{5}}{3}$



- Opción correcta: d
- Solución:

Si $AE = x$, entonces $EC = 3x$ –ya que $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{1}{3}$.
Luego, $AC = 8 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$.
En el $\triangle DCE$ (que es un triángulo rectángulo), $DC = 4$ ($\overline{DE}$ es mediatriz) y $EC = 6$; aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene que $6^2 = 4^2 + DE^2 \Rightarrow DE = 2\sqrt{5}$.
* Sea $\overline{FA}$ la altura del $\triangle ABC$ correspondiente con $\overline{BC}$.
Por ser ángulos correspondientes entre paralelas se tiene que $\measuredangle DEC = \measuredangle FAC = \alpha$.
Así, $\triangle DEC \sim \triangle FAC$ (criterio de semejanza A-A-A) y se tiene que $\dfrac{FA}{DE} = \dfrac{AC}{EC} \Rightarrow \dfrac{FA}{2\sqrt{5}} = \dfrac{8}{6} \Rightarrow FA = \dfrac{8\sqrt{5}}{3}$.
Luego, $(ABC) = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot \dfrac{8\sqrt{5}}{3} = \dfrac{32\sqrt{5}}{3}$.



* Alternativo
Sea α la medida del $\angle ACB$. En $\triangle CED$ se tiene $\text{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, por lo que $(ABC) = \dfrac{AC \cdot CB \cdot \text{sen}\alpha}{2} = \dfrac{32\sqrt{5}}{3}$

23. Sean a y b números reales positivos, tales que $a^2 - b^2 = 2$. Una solución de la ecuación

$$\sqrt{\frac{4a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4} = \left(\frac{a-b}{b}\right) x + \frac{b}{a}$$

es

(a) $a - b$

(b) $a + b$

(c) $a\,(a - b)$

(d) $a\,(a + b)$

- Opción correcta: d
- Solución:

Observe que

$$\frac{4a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 = \left(\frac{2a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$$

Además, como a, b son positivos entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4} &= \sqrt{\left(\frac{2a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2} \\ &= \frac{2a}{b} + \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Luego,

$$\sqrt{\frac{4a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4} = \left(\frac{a-b}{b}\right) x + \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{2a}{b} + \frac{b}{a} = \left(\frac{a-b}{b}\right) x + \frac{b}{a},$$

despejando se obtiene que

$$x = \frac{2a}{a-b} = \frac{2a(a+b)}{a^2 - b^2} = a(a+b)$$

24. La cantidad de pares de enteros positivos (a, b) que cumplen que $a + 3b < 100$ y que $a + b$ divide a $a^2 + ab + 2b$ es

    (a) 50

    (b) 49

    (c) 25

    (d) 24

- Opción correcta: d
- Solución:

  $a + b|a^2 + ab + 2b \Leftrightarrow a + b|a(a + b) + 2b \Leftrightarrow a + b|2b \Leftrightarrow a + b|b + b + a - a \Leftrightarrow a + b|b - a.$

  Como $0 \leq |\dfrac{b-a}{a+b}| < 1$ entonces $a - b = 0$, por lo que $a = b$, de donde $4a < 100 \Rightarrow a < 25$, por lo que hay 24 pares (a, b) que cumplen lo querido.

25. Sea $\square ABCD$ un cuadrado, E y F los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Si G es la intersección de $\overline{DF}$ con $\overline{CE}$, entonces $\dfrac{EG}{GC}$ es

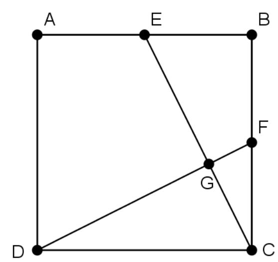
    (a) 2

    (b) $\dfrac{5}{2}$

    (c) $\dfrac{1}{3}$

    (d) $\dfrac{3}{2}$

- Opción correcta: d
- Solución:



Note que $\triangle DCF \cong \triangle CBE$, por (L-A-L). Entonces $\angle GCF \cong \angle FDC$ y como $m\angle C = 90°$ se tiene $m\angle CGF = 90°$, por lo que $\triangle DCF \sim \triangle CGF$. Entonces

$$2 = \frac{DC}{CF} = \frac{GC}{GF} = \frac{BC}{BE}$$

Sea $x = GF$, entonces por Pitágoras y las razones anteriores encontramos $GC = 2x$ y $EC = \sqrt{5FC^2} = 5x$, así la respuesta es

$$\frac{5x - 2x}{2x} = \frac{3}{2}$$