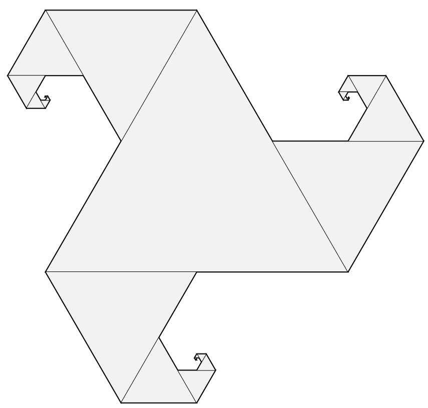
XXXI OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

PRIMERA ELIMINATORIA



Nivel III

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2019

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2019 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 5 de julio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

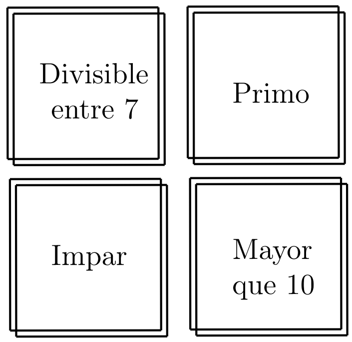
INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. En la figura adjunta, hay cuatro tarjetas con una frase distinta en cada una por uno de sus lados. Del otro lado de cada una de las tarjetas se escribe uno de los números 2, 5, 7 o 12 (uno en cada tarjeta), de manera que el número escrito **no corresponda con la frase de la tarjeta respectiva**. El número escrito detrás de la tarjeta con la frase *Mayor que 10* es



   (a) 2

   (b) 5

   (c) 7

   (d) 12

2. El mínimo número de veces que se debe tirar un dado para garantizar que se obtenga el mismo número al menos cuatro veces es

   (a) 7

   (b) 13

   (c) 19

   (d) 25

3. Pepe, Sam, Marvi, Elmer y Claudio nacieron el 11 de enero de 2000, 23 de enero de 2001, 20 de febrero de 2001, 11 de marzo de 2000 y 20 de marzo de 2001, pero no necesariamente en ese orden. Si se sabe que Sam y Pepe nacieron el mismo mes y que Marvi y Elmer también nacieron el mismo mes y, además, que Marvi y Claudio nacieron en días con el mismo número y, que Sam y Elmer también nacieron en días con el mismo número, enntonces el más joven de los cinco es

   (a) Marvi

   (b) Elmer

   (c) Pepe

   (d) Claudio

4. La suma de todos los números enteros positivos menores que 200 que tienen exactamente 3 divisores distintos corresponde a

   (a) 377

   (b) 419

   (c) 547

   (d) 661

5. Si $a^2 + ab + b^2 = 3$ entonces la expresión $\dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2}$ es equivalente a

   (a) $\dfrac{a-b}{3}$

   (b) $\dfrac{a-b}{1-ab}$

   (c) $\dfrac{3(a-b)}{1-ab}$

   (d) $\dfrac{2(a+b)}{3}$

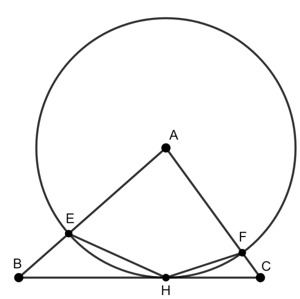
6. Considere el triángulo $\triangle ABC$ de la figura adjunta, en donde $m\angle ABC = 40°$ y $m\angle ACB = 60°$, H es el pie de la altura desde A sobre el lado $\overline{BC}$. Sean E y F las intersecciones de la circunferencia con centro A y radio AH con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. La medida del ángulo $\angle EHF$ es

   (a) 140°

   (b) 150°

   (c) 160°

   (d) 170°



7. Al realizar la suma

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2018}+\sqrt{2019}}$$

el resultado corresponde a

(a) $\sqrt{2018}+1$

(b) $\sqrt{2018}-1$

(c) $\sqrt{2019}+1$

(d) $\sqrt{2019}-1$

8. Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que $AB = 24$cm., $AC = 32$cm. y $BC = 40$cm. y sea M el punto medio de $\overline{BC}$. $\square AMDE$ es un cuadrado, y $\overline{MD}$ intersecta $\overline{AC}$ en el punto F. Si $\dfrac{AF}{FC} = \dfrac{25}{7}$ y $AM = 20$, entonces el área del cuadrilátero $\square AFDE$, en cm^2, es

(a) 200

(b) 250

(c) 275

(d) 300

9. Sea n un número entero que al ser dividido por 3 deja residuo 1 y al ser dividido por 5 deja residuo 2. El residuo que deja n al ser dividido por 15 es

(a) 4

(b) 7

(c) 11

(d) 14

10. Un equipo de futbol inicia el partido con los 11 jugadores titulares utilizando camisetas numeradas del 1 al 11, sin que sobren números. Si se eligen 5 jugadores al azar, la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar es

    (a) $\frac{1}{77}$

    (b) $\frac{5}{77}$

    (c) $\frac{100}{231}$

    (d) $\frac{118}{231}$

11. En un triángulo ABC, la medida del ángulo exterior en el vértice B es $62°$ y las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cortan al lado $\overline{AC}$ en E y F, respectivamente. La medida del ángulo $\angle EBF$ es

    (a) $118°$

    (b) $90°$

    (c) $62°$

    (d) $56°$

12. La cantidad de pares ordenados (x, y) de números enteros que son solución de la ecuación $x^2y+2xy-2019 = 0$ corresponde a

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) 3

13. La cantidad de maneras diferentes en que se pueden ordenar las letras de la palabra `MATEMATICA` corresponde a

    (a) 151 200

    (b) 302 400

    (c) 10!

    (d) 10^{10}

Pregunta eliminada por un error en la solución. Solución se hacepara los números que son múltiplos de 3 ó 5, y el enunciado dice los que son múltiplos de 3 y 5. Se debe corregir

14. La cantidad de números enteros positivos menores a 2019 que son múltiplos de 3 y 5, pero no de 7 corresponde a

    (a) 808

    (b) 856

    (c) 906

    (d) 942

15. La cantidad de ternas de números enteros positivos (a, b, c) que son solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2ab + c &= 35 \\ 2a + bc &= 28 \end{aligned}$$

corresponde a

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) 4

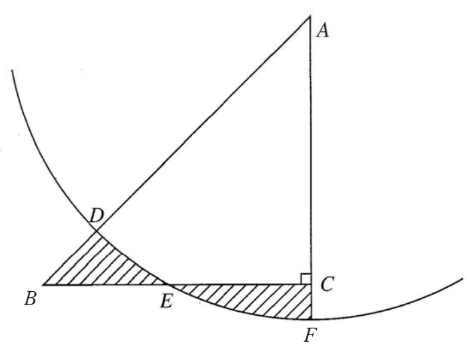
16. En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es recto en C, $AC = BC = 1$ y $\widehat{DEF}$ es un arco de la circunferencia con centro en A. Si las áreas de la regiones sombreadas son iguales y $AD = \dfrac{x}{\sqrt{\pi}}$, el valor de la x es

    (a) 1

    (b) 2

    (c) 3

    (d) 4



17. Si se sabe que $a + b = 4$ y $b - a = c + 5$, el valor numérico de $a^2 + 2a + ac + 2b + bc - b^2$ es

    (a) -20

    (b) -12

    (c) 12

    (d) 20

18. La cantidad de números primos p tales que $\dfrac{p^2 + 6p + 5}{p^2 - 6p - 7}$ sea un número entero corresponde a

    (a) 0
    (b) 3
    (c) 5
    (d) 12

19. Jon le indica a su padre, que por favor le dé 2000 colones diarios para asistir al colegio, pero su padre considera que debe realizar algún esfuerzo por ganarlo, y le ofrece únicamente 500 colones diarios. Después de unos minutos, Jon le dice a su padre que hoy por ser el primer día le dé 5 colones, el segundo día 10 colones, tercer día 20 colones y así sucesivamente, cada día le dé el doble de colones que el día anterior. El papá le pregunta: ¿por cuánto tiempo? Jon responde: únicamente por 30 días. La cantidad de dinero que debe dar el papá de Jon el día 20 es

    (a) 655 360

    (b) 1 310 720

    (c) 2 621 440

    (d) 5 242 880

20. Si $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$, entonces el valor de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ es

    (a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(-1-\sqrt{3}\right)$

    (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)$

    (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

    (d) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$