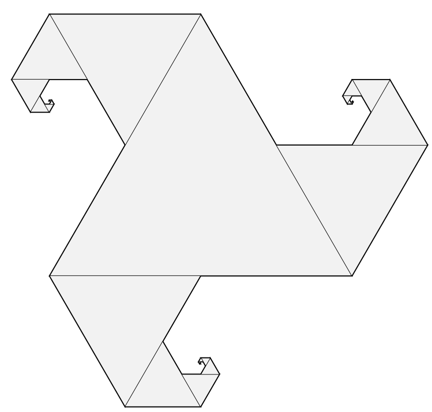
XXXI OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



Nivel III
$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2019

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2019 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del viernes 5 de julio, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P - Q - R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

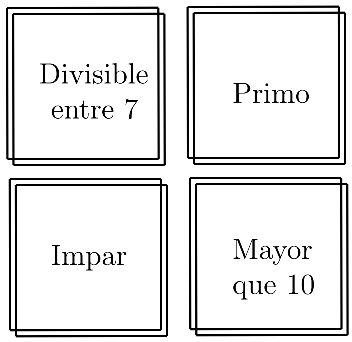
1. En la figura adjunta, hay cuatro tarjetas con una frase distinta en cada una por uno de sus lados. Del otro lado de cada una de las tarjetas se escribe uno de los números 2, 5, 7 o 12 (uno en cada tarjeta), de manera que el número escrito **no corresponda con la frase de la tarjeta respectiva**. El número escrito detrás de la tarjeta con la frase *Mayor que 10* es

   (a) 2

   (b) 5

   (c) 7

   (d) 12



- Opción correcta: (c)
- Solución: Como 2, 5 y 7 son primos, detrás de la tarjeta que dice *Primo* se coloca el número 12.

  De los números 2, 5 y 7, como 5 y 7 son impares, detrás de la tarjeta que dice *Impar* se coloca el número 2.

  Quedan los números 5 y 7, así que detrás de la tarjeta que dice *Divisible por 7* se coloca el número 5.

  Por lo tanto, detrás de la tarjeta que dice *Mayor que 10* se coloca el número 7.

2. El mínimo número de veces que se debe tirar un dado para garantizar que se obtenga el mismo número al menos cuatro veces es

   (a) 7

   (b) 13

   (c) 19

   (d) 25

- Opción correcta: (c)
- Solución: Por el principio del palomar. Al tirar el dado 6 veces no hay garantía que salga dos veces el mismo número, por lo que para que se repita el mismo número, con certeza, debe tirarse el dado al menos 7 veces.
  Utilizando esta analogía, para obtener un mismo número tres veces se debe tirar el dado al menos 13 veces, por lo que para obtener el mismo número al menos cuatro veces, debe tirarse el dado al menos 19 veces.

3. Pepe, Sam, Marvi, Elmer y Claudio nacieron el 11 de enero de 2000, 23 de enero de 2001, 20 de febrero de 2001, 11 de marzo de 2000 y 20 de marzo de 2001, pero no necesariamente en ese orden. Si se sabe que Sam y Pepe nacieron el mismo mes y que Marvi y Elmer también nacieron el mismo mes y, además, que Marvi y Claudio nacieron en días con el mismo número y, que Sam y Elmer también nacieron en días con el mismo número, enntonces el más joven de los cinco es

   (a) Marvi

   (b) Elmer

   (c) Pepe

   (d) Claudio

- Opción correcta: (a)
- Solución: Claudio es el único que no nació en el mismo mes que alguien más, así que nació el 20 de febrero de 2001. Marvi nació en un día con el mismo número que Claudio, así que nació el 20 de marzo de 2001 y es el más joven del grupo.

4. La suma de todos los números enteros positivos menores que 200 que tienen exactamente 3 divisores distintos corresponde a

   (a) 377

   (b) 419

   (c) 547

   (d) 661

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Los únicos números enteros que cumplen con la condición son los cuadrados de los números primos 2, 3, 5, 7, 11 y 13, cuyos cuadrados son 4, 9, 25, 49, 121 y 169, cuya suma es 377.

5. Si $a^2 + ab + b^2 = 3$ entonces la expresión $\dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2}$ es equivalente a

(a) $\dfrac{a-b}{3}$

(b) $\dfrac{a-b}{1-ab}$

(c) $\dfrac{3(a-b)}{1-ab}$

(d) $\dfrac{2(a+b)}{3}$

- Opción correcta: b)

- Solución:

$$\begin{aligned}\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2} &= \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2-2ab+b^2} \\ &= \frac{(a-b)\cdot 3}{a^2+ab+b^2-3ab} \\ &= \frac{3(a-b)}{3-3ab} \\ &= \frac{a-b}{1-ab}\end{aligned}$$

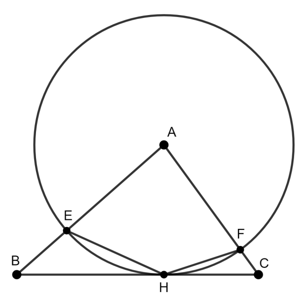
6. Considere el triángulo $\triangle ABC$ de la figura adjunta, en donde $m\angle ABC = 40°$ y $m\angle ACB = 60°$, H es el pie de la altura desde A sobre el lado $\overline{BC}$. Sean E y F las intersecciones de la circunferencia con centro A y radio AH con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. La medida del ángulo $\angle EHF$ es

(a) 140°

(b) 150°

(c) 160°

(d) 170°



- Opción correcta: (a)

- Solución: Note que los triángulos $\triangle AHE$ y $\triangle AHF$ son isósceles. Como $\overline{AH}$ es perpendicular a $\overline{BC}$ se tiene que $m\angle BAH = 50°$ y $m\angle CAH = 30°$, de donde $m\angle AHE = 65°$ y $m\angle AHF = 75°$. Así $m\angle EHF = 65° + 75° = 140°$.

7. Al realizar la suma

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2018}+\sqrt{2019}}$$

el resultado corresponde a

(a) $\sqrt{2018}+1$

(b) $\sqrt{2018}-1$

(c) $\sqrt{2019}+1$

(d) $\sqrt{2019}-1$

- Opción correcta: (d)
- **Solución:** Observe que

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{-1}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

Así, podemos reescribir la suma de la forma:

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+...+\left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right)=-\sqrt{1}+\sqrt{2019}=\sqrt{2019}-1$$

8. Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que $AB=24$cm., $AC=32$cm. y $BC=40$cm. y sea M el punto medio de $\overline{BC}$. $\square AMDE$ es un cuadrado, y $\overline{MD}$ intersecta $\overline{AC}$ en el punto F. Si $\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{25}{7}$ y $AM=20$, entonces el área del cuadrilátero $\square AFDE$, en cm^2, es

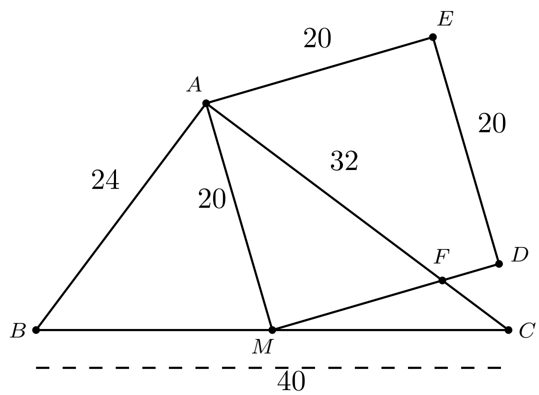
(a) 200

(b) 250

(c) 275

(d) 300

- Opción correcta: (b)
- Solución:



Se tiene que $(AEDM) = 400$.
Como $\dfrac{AF}{FC} = \dfrac{25}{7}$ y $AF + FC = 32$ entonces $AF = 25$ y $FC = 7$.
Como los $\triangle AMB$ y $\triangle CMA$ tienen la misma base (20) y la misma altura, entonces tienen la misma área.
$(BAC) = \dfrac{24 \cdot 32}{2} = 384$, pues es rectángulo.
Luego $(ACM) = 192$; además $(ACM = 192) = \dfrac{32 \cdot h_2}{2}$, por lo que la altura del $\triangle ACM$ sobre el lado $\overline{AC}$ es 12.
Después $(AMF) = 150$. Finalmente $(AFDE) = 400 - 150 = 250$.

9. Sea n un número entero que al ser dividido por 3 deja residuo 1 y al ser dividido por 5 deja residuo 2. El residuo que deja n al ser dividido por 15 es

   (a) 4

   (b) 7

   (c) 11

   (d) 14

- Opción correcta: b)
- Solución:

  Al dividir n por 5 el residuo es 2 entonces (1) $n = 5k + 2, k \in \mathbb{Z}$, luego $k = 3q + r, 0 \leq r < 2$. Sustituyendo en (1) tenemos que

$$n = 5(3q + r) + 2 = 15q + 5r + 2$$

.

Por otro lado, el residuo de dividir n por 3 es el mismo de $(5r + 2)$ y como dicho residuo es 1 entonces el valor de r es 1. De esta forma $n = 15q + 7$

10. Un equipo de futbol inicia el partido con los 11 jugadores titulares utilizando camisetas numeradas del 1 al 11, sin que sobren números. Si se eligen 5 jugadores al azar, la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar es

    (a) $\frac{1}{77}$

    (b) $\frac{5}{77}$

    (c) $\frac{100}{231}$

    (d) $\frac{118}{231}$

- Opción correcta: (d)
- Solución: Primero se determina el número de formas diferentes en las que se puede tomar 5 jugadores de los 11 titulares al azar, esto es: $\binom{11}{5} = 462$ maneras distintas.

  Se debe considerar que con números del 1 al 11 se tiene 6 camisetas con números impares y 5 con números pares, además para que la suma de los 5 números de las camisetas sea impar se debe:

  - Tomar exactamente una camiseta con número impar.
  - Tomar exactamente tres camisetas con número impar.
  - Tomar exactamente cinco camisetas con número impar.

  Veamos cada caso por aparte y luego se suman las probabilidades:

  - Tomando exactamente una camiseta con número impar.
    Se toma 1 camiseta con número impar y 4 camisetas con número par. Esto es $\binom{6}{1}\binom{5}{4} = 30$.
  - Tomando exactamente tres camisetas con número impar. Se toma 3 camisetas con número impar y 2 camisetas con número par. Esto es $\binom{6}{3}\binom{5}{2} = 200$.
  - Tomando exactamente cinco camisetas con número impar. Se toma 5 camisetas con número impar y ninguna camiseta con número par. Esto es $\binom{6}{5}\binom{5}{0} = 6$.

  Esto quiere decir que la probabilidad es $\frac{30+200+6}{462} = \frac{236}{462} = \frac{118}{231}$

11. En un triángulo ABC, la medida del ángulo exterior en el vértice B es 62° y las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cortan al lado $\overline{AC}$ en E y F, respectivamente. La medida del ángulo $\angle EBF$ es

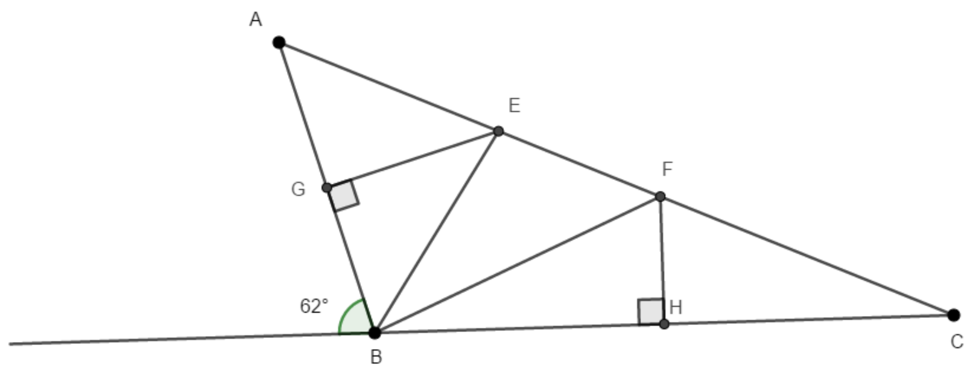
(a) 118°

(b) 90°

(c) 62°

(d) 56°

- Opción correcta: (d)
- **Solución:** Considere la figura:



Como el ángulo exterior mide 62° se tiene que $m\angle ABC = 118°$.
Además se tiene que $\triangle AEG \sim \triangle BEG$ usando criterio $l.a.l.$, por lo que se concluye que $m\angle EAG = m\angle EBG = m\angle ABE$; y $\triangle CFH \sim \triangle BFH$ usando criterio $l.a.l.$, por lo que se concluye que $m\angle FCH = m\angle FBH = m\angle FBC$.(*)
Ahora bien, sabemos que $62° = m\angle BAC + m\angle BCA$ (ángulo exterior), por lo tanto se cumple que $62° = m\angle EBG + m\angle FBH$ por resultado (*).
Por otra parte se cumple que: $m\angle ABC = m\angle ABE + m\angle EBF + m\angle FBC$ esto es $118° = m\angle ABE + m\angle EBF + m\angle FBC = 62° + m\angle EBF$ por lo que se concluye que $m\angle EBF = 56°$ que es lo buscado.

12. La cantidad de pares ordenados (x, y) de números enteros que son solución de la ecuación $x^2y+2xy-2019 = 0$ corresponde a

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

- Opción correcta: (d)

- Solución: Veamos que $x^2y + 2xy = 2019 \Rightarrow xy(x+2) = 2019 = 1 \cdot 3 \cdot 673$. Como se trata de números enteros no puede darse $x = 673$ ó $x = -673$, pues no se obtendría un valor entero para y. Entonces puede darse $x = 1$, $x = -1$, $x = -3$ ó $x = 3$.
  Si $x = 1$ se tiene $x + 2 = 3$ y $y = 673$.
  Si $x = -1$ se tiene $x + 2 = 1$ y $y = -2019$.
  Si $x = -3$ se tiene $x + 2 = -1$ y $y = 673$.
  Si $x = 3$ se tiene $x + 2 = 5$ pero y no sería entero.

  Entonces los únicos pares ordenados posibles son$(x, y) = (1, 673)$, $(x, y) = (-1, -2019)$, $(x, y) = (-3, 673)$. Así solo hay 3 pares de soluciones.

13. La cantidad de maneras diferentes en que se pueden ordenar las letras de la palabra `MATEMATICA` corresponde a

    (a) 151 200
    (b) 302 400
    (c) 10!
    (d) 10^{10}

- Opción correcta: (a)
- Solución:
  La palabra tiene 10 letras, y además note que la letra A se repite 3 veces, la letra M se repite dos veces y la letra T se repite dos veces; las demás aparecen únicamente una vez en la palabra. Por ende, la cantidad de combinaciones distintas es

$$\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 151\,200$$

Pregunta eliminada por un error en la solución. Solución se hacepara los números que son múltiplos de 3 ó 5, y el enunciado dice los que son múltiplos de 3 y 5. Se debe corregir

14. La cantidad de números enteros positivos menores a 2019 que son múltiplos de 3 y 5, pero no de 7 corresponde a

    (a) 808
    (b) 856
    (c) 906
    (d) 942

- Opción correcta: Ninguna

- Solución: Hay $[2019/3] = 673$ múltiplos de 3, $[2019/5] = 403$ múltiplos de 5, $[2019/15] = 134$ múltiplos de 15, menores que 2019, así hay $673 + 403 - 134 = 942$ múltiplos de 3 o 5; de estos hay que quitar los que son múltiplos de 7.
  Hay $[2019/21] = 96$ múltiplos de 21, $[2019/35] = 57$ múltiplos de 35 y $[2019/105] = 19$ múltiplos de 105, por lo que entre estos hay $96 + 57 - 19 = 134$ múltiplos de 7. Por lo que en total hay $942 - 134 = 808$ múltiplos de 3 y 5, pero no de 7 menores que 2019.

15. La cantidad de ternas de números enteros positivos (a, b, c) que son solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2ab + c &= 35 \\ 2a + bc &= 28 \end{aligned}$$

corresponde a

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 4

- Opción correcta: (c)
- Solución: Restando las ecuaciones tenemos que $(b-1)(2a-c) = 7$. De donde si $b = 2$ entonces $2a - c = 7$, así $a = 7$, $c = 7$, también si $b = 8$ entonces $a = 2$, $c = 3$. Así todas las posibles opciones son $(a, b, c) = (7, 2, 7)$ y $(a, b, c) = (2, 8, 3)$. De donde solo hay dos ternas.

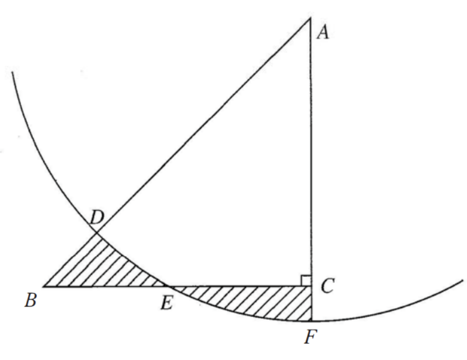
16. En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es recto en C, $AC = BC = 1$ y $\widehat{DEF}$ es un arco de la circunferencia con centro en A. Si las áreas de la regiones sombreadas son iguales y $AD = \dfrac{x}{\sqrt{\pi}}$, el valor de la x es

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4



- Opción correcta: (b)
- Solución: Como el área del $\triangle ABC$ y el área del sector DAF son iguales, entonces se tiene que

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2$$

17. Si se sabe que $a + b = 4$ y $b - a = c + 5$, el valor numérico de $a^2 + 2a + ac + 2b + bc - b^2$ es

   (a) -20

   (b) -12

   (c) 12

   (d) 20

- Opción correcta: (b)
- Solución: Del enunciado se tiene que

$$\begin{aligned} a^2 + 2a + ac + 2b + bc - b^2 &= 2a + 2b + ac + bc + a^2 - b^2 \\ &= 2(a+b) + c(a+b) + (a+b)(a-b) \\ &= (a+b)(2 + c + a - b) \end{aligned}$$

Del enunciado, $b - a = c + 5 \Rightarrow b - a = 3 + 2 + c \Rightarrow -3 = 2 + c + a - b$.
Así, $(a+b)(2 + c + a - b) = 4 \cdot -3 = -12$.

18. La cantidad de números primos p tales que $\dfrac{p^2 + 6p + 5}{p^2 - 6p - 7}$ sea un número entero corresponde a

   (a) 0
   (b) 3
   (c) 5
   (d) 12

- Opción correcta: (c)
- Solución:

Factorizando el numerador y el denominador obtenemos que

$$\frac{p^2 + 6p + 5}{p^2 - 6p - 7} = \frac{(p+1)(p+5)}{(p+1)(p-7)} = \frac{p+5}{p-7}.$$

Ahora, note que

$$\frac{p+5}{p-7} = \frac{p - 7 + 5 + 7}{p-7} = 1 + \frac{12}{p-7},$$

por lo que basta examinar la fracción $\dfrac{12}{p-7}$.

El conjunto de los divisores enteros de 12 es $D_{12} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$. Resolviendo las ecuaciones $p - 7 = d$, con $d \in D_{12}$, se obtienen $-5, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 19$ por lo que $p \in \{3, 5, 11, 13, 19\}$.

19. Jon le indica a su padre, que por favor le dé 2000 colones diarios para asistir al colegio, pero su padre considera que debe realizar algún esfuerzo por ganarlo, y le ofrece únicamente 500 colones diarios. Después de unos minutos, Jon le dice a su padre que hoy por ser el primer día le dé 5 colones, el segundo día 10 colones, tercer día 20 colones y así sucesivamente, cada día le dé el doble de colones que el día anterior. El papá le pregunta: ¿por cuánto tiempo? Jon responde: únicamente por 30 días. La cantidad de dinero que debe dar el papá de Jon el día 20 es

   (a) 655 360

   (b) 1 310 720

   (c) 2 621 440

   (d) 5 242 880

- Opción correcta: (c)
- Solución: Observamos que los montos que solicita Jon son múltiplos de 5 y que cada día aumentan el doble. El día 1 le da 5, el día 2 le da $10 = 2 \cdot 5$, el día 3 $20 = 2^2 \cdot 5$, el día 4 $20 = 2^3 \cdot 5$. Vemos que en general, el día n debe darle $M(n) = 2^{n-1} \cdot 5$. Luego el día 20 el papá debe dar un monto de $M = 2^{20-1} \cdot 5 = 2\,621\,440$.

20. Si $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$, entonces el valor de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ es

   (a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(-1-\sqrt{3}\right)$

   (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)$

   (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

   (d) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$

- Opción correcta: (d)
- Solución: Primero, hay que obervar que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$.

  Luego,

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)
\end{aligned}
$$