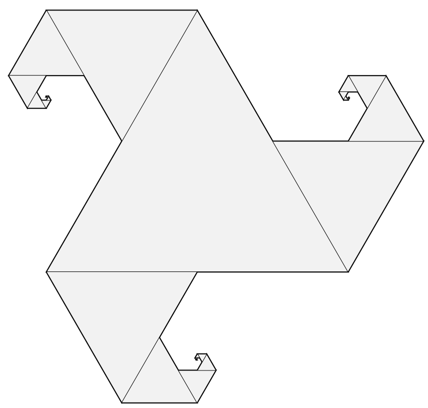
XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

PRIMERA ELIMINATORIA



Nivel III

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2020

Estimado estudiante:

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del XXX, en la siguiente dirección electrónica: **www.olcoma.com**

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2020 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. Hoy es lunes y Juan decide ahorrar todos los días, desde hoy, de la siguiente manera. Hoy ahorra 10 colones, mañana ahorra el doble, es decir 20 colones, el miércoles ahorra 40 colones y así sucesivamente. ¿Que día de la semana el total acumulado por los ahorros de Juan supera los 45 000 colones?
   (a) Jueves
   (b) Viernes
   (c) Sábado
   (d) Domingo

2. Antonio dibuja un cuadrado grande de n cm de lado, y lo divide en n^2 cuadrados pequeños del mismo tamaño, luego pinta todos cuadrados pequeños que forman el borde del cuadrado grande. Cuando termina de colorear se da cuenta que ha pintado 268 cuadrados pequeños. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?
   (a) 4 225
   (b) 4 356
   (c) 4 489
   (d) 4 624

3. Un agricultor prepara el terreno para la siembra de árboles frutales. Por la forma y el tamaño de la finca va a sembrar 70 filas, de modo que cada una tiene 4 árboles más que la fila anterior. Si en la fila 4 solo puede sembrar 17 árboles entonces, ¿cuántos árboles puede sembrar el agricultor en su totalidad?
   (a) 11 190
   (b) 11 010
   (c) 10 110
   (d) 10 010

4. Sean abc, bca y cab números de tres cifras tal que $abc + bca + cab = 2\,220$. Entonces el valor de $(a + b + c)^2$ corresponde a
   (a) 100
   (b) 256
   (c) 400
   (d) 1 296

5. La suma de todos los números enteros positivos menores que 1 000 que tienen exactamente 5 divisores distintos corresponde a

   (a) 16

   (b) 97

   (c) 722

   (d) 978

6. Si x y y son dos números reales distintos tales que

$$\begin{cases} x^2 = 5x + 3y \\ y^2 = 5y + 3x \end{cases}$$

   Entonces el valor de $x^2 + y^2$ es igual a

   (a) 8

   (b) 16

   (c) 34

   (d) 64

7. La cantidad de números de cuatro cifras, menores a 5 000, con la forma $a6b5$ y que son divisibles por los primeros tres números primos impares es

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 4

8. Considere un triángulo rectángulo en el que uno de sus catetos mide $2\sqrt{7}$ cm y el ángulo opuesto a este cateto mide $30°$. Si x representa la medida del otro cateto y z representa la medida de su hipotenusa, ambas en centímetros, se puede asegurar que

   (a) $x \tan 30° + z \operatorname{sen} 30° = 4\sqrt{7}$

   (b) $x \tan 30° + z \operatorname{sen} 30° = 2\sqrt{7}$

   (c) $x \tan 30° + z \cos 30° = 4\sqrt{21}$

   (d) $x \tan 30° + z \cos 30° = \sqrt{21}$

9. En el triangulo acutángulo $\triangle MNR$, Y es el punto medio de $\overline{MR}$ y X es el punto medio de $\overline{MN}$. L es el pie de la altura del $\triangle MNR$ desde N. El punto medio de $\overline{LN}$ es K. Los puntos T y S son puntos en $\overline{MX}$ de manera que $MT = TS = SX$. Determine la razón de las áreas $\triangle TSR$ entre $\triangle RYK$, es decir, $\dfrac{(TSR)}{(RYK)}$.

   (a) $\dfrac{1}{3}$

   (b) $\dfrac{2}{3}$

   (c) 1

   (d) $\dfrac{3}{2}$

10. Si el máximo común divisor de $2^{2020} + 2019$ y $2^{2020} + 2020$ es a y el mínimo común múltiplo de b y $b + 1$ es 12, entonces el valor de $a + b$ corrresponde a

   (a) 3

   (b) 4

   (c) 5

   (d) 2020

11. Un dado de seis caras se lanza tres veces. Si el número obtenido en el tercer lanzamiento es igual a la suma de los números obtenidos en los dos primeros, ¿cuál es la probabilidad de que el 2 haya salido al menos una vez?

   (a) $\dfrac{1}{6}$

   (b) $\dfrac{91}{16}$

   (c) $\dfrac{1}{2}$

   (d) $\dfrac{8}{15}$

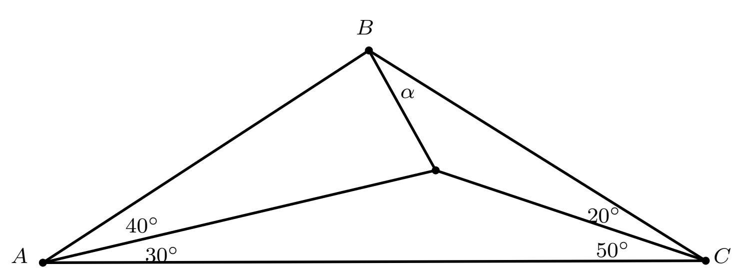
12. De acuerdo con los datos de la figura, la medida del ángulo α es

   (a) $10°$

   (b) $15°$

   (c) $20°$

   (d) $30°$



13. Si α y β son números enteros positivos que satisfacen la ecuación $\alpha^{\alpha} \cdot (3\alpha+1)^{\alpha} \cdot (8\alpha+1)^{\beta} \cdot (5\alpha+1)^{\beta} = 36\,652$, entonces el valor de $\alpha - \beta$ corresponde a
    (a) 0
    (b) 1
    (c) 2
    (d) 5

14. Ana está jugando a lanzar dardos a un blanco circular en que se asignan diferentes puntos según la región en la que caiga el dardo. Se sabe que obtuvo 99 puntos en total, que sólo atinó a la zona de 5, 8 y 10 puntos, que atinó la misma cantidad de lanzamientos en la zona de 8 que en la de 10 puntos. Si además se sabe que sólo acertó el 75 % de sus lanzamientos, la cantidad total de lanzamientos que realizó Ana es
    (a) 16
    (b) 20
    (c) 28
    (d) 32

15. Sean x y y dos números reales distintos tales que:

$$x^2 + x = 2y^2 + y = 50x - 49y$$

    El valor de $x + y$ corresponde a
    (a) 10
    (b) 15
    (c) 20
    (d) 24

16. Sea $N = 2^{2020}$. La cifra de las unidades del número $N + (N + 2) + (N + 4)$ corresponde a
    (a) 0
    (b) 2
    (c) 4
    (d) 6

17. Los vértices de un cuadrado $PQRS$ están sobre una misma circunferencia T. Si se sabe que el perímetro de la circunferencia T es $\pi^2\sqrt{3}$, entonces el área de la región que está fuera del $\square PQRS$ pero dentro de la circunferencia T correspode a

(a) $\dfrac{3\pi^2}{4}\left(\pi - 2\right)$

(b) $\dfrac{3\pi^2}{2}\left(\pi - 2\right)$

(c) $\dfrac{3\pi^2}{2}\left(2\pi - 1\right)$

(d) $\dfrac{3\pi^2}{4}\left(2\pi - 1\right)$

18. Considere la ecuación $mx + (k-2)\,y = 3$ en la que x, y, k y m son números reales, tales que $m > 0$ y $k \neq 2$. Con certeza se tiene que $y > 0$ si se cumple que

(a) $x < \dfrac{3}{m}$ y $k > 2$

(b) $x > \dfrac{3}{m}$ y $k > 2$

(c) $x < \dfrac{3}{m}$ y $k > -2$

(d) $x > \dfrac{3}{m}$ y $k > -2$

19. Hay un grupo de 12 corredores llamados corredor 1, corredor 2, ... , corredor 12. Los nombres les fueron asignados porque el corredor k tarda exactamente k minutos dando una vuelta a una pista circular de carreras. Si todos empiezan a correr en el mismo punto y en la misma dirección, recorriendo varias vueltas siempre en el mismo tiempo indicado para cada uno, entonces la mínima cantidad de minutos que deben transcurrir para que todos los doce pasen simultáneamente por el punto de salida es 27 720 minutos. Sea $T > 0$ el menor tiempo en minutos, tal que al menos 5 de los corredores pasan simultáneamente por el punto de salida. Entonces la suma de los dígitos de T corresponde a

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 7

20. El triángulo $\triangle ABC$ satisface que $m\angle A = 60°$ y $m\angle B = 90°$. Los puntos D, E, F sobre los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, son tales que el $\triangle DEF$ es equilátero y $\overline{EF}$ es paralelo a $\overline{BC}$. Si el perímetro del $\triangle ABC$ es 5, entonces el área del $\triangle DEF$ es igual a:
   (a) $\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$
   (b) $2 - \sqrt{3}$
   (c) $\sqrt{3} - \frac{3}{2}$
   (d) $2\sqrt{3} - 3$