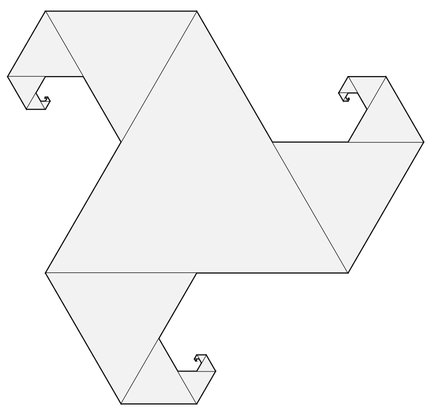
XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN

PRIMERA ELIMINATORIA



Nivel III

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2020

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2020 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del XXX, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

1. Hoy es lunes y Juan decide ahorrar todos los días, desde hoy, de la siguiente manera. Hoy ahorra 10 colones, mañana ahorra el doble, es decir 20 colones, el miércoles ahorra 40 colones y así sucesivamente. ¿Que día de la semana el total acumulado por los ahorros de Juan supera los 45 000 colones?
   (a) Jueves

   (b) Viernes

   (c) Sábado

   (d) Domingo

- Opción correcta: (c)

- Solución: Primero vamos a calcular los ahorros y el acumulado de cada día para buscar una forma general.

	ahorro diario	total acumulado
0.	10	10
1.	20	30
2.	40	70
3.	80	150
4.	160	310
5.	320	630
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t.	$10 \cdot 2^t$	$2\left(10 \cdot 2^t\right) - 10$

Notamos que el ahorro de Juan está dado por $10 \cdot 2^t$ donde t es el tiempo, con el día lunes como $t = 0$. Conociendo el patrón que sigue el total acumulado se requiere conocer las potencia de 2. Por ejemplo $2^{10} = 1\,024$, $2^{11} = 2\,048$, $2^{12} = 4\,096$.
Podemos ver que los exponentes 11 y 12 se aproximan a lo que buscamos.
$2^{11} = 2\,048$, el día 11 se ahorra $10 \cdot 2^{11} = 20\,480$ por lo que el total acumulado es $2 \cdot 20480 - 10 = 40\,970$
$2^{12} = 2\,048$, el día 12 se ahorra $10 \cdot 2^{12} = 40\,960$ por lo que el total acumulado será mayor a $80\,000$, por lo que el 12 es el día que buscamos.
Como se inicia el lunes, el día 7 será nuevamente lunes, el 8 martes, 9 miércoles, 10 jueves, 11 viernes y finalmente el 12 será sábado.

2. Antonio dibuja un cuadrado grande de n cm de lado, y lo divide en n^2 cuadrados pequeños del mismo tamaño, luego pinta todos cuadrados pequeños que forman el borde del cuadrado grande. Cuando termina de colorear se da cuenta que ha pintado 268 cuadrados pequeños. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?
   (a) 4 225

   (b) 4 356

   (c) 4 489

   (d) 4 624

- Opción correcta: (d)

- Solución: Analizando lo que ocurre con cuadrados 2×2, 3×3, 4×4, 5×5, 6×6 se observa que el número de cuadrados pequeños que forman el borde es, respectivamente, 4, 8, 12, 16, 20, lo que se puede ver como $4 \cdot 1,\ 4 \cdot 2,\ 4 \cdot 3,\ 4 \cdot 4,\ 4 \cdot 5$.
  En general, se puede observar que para un cuadrado de tamaño $n \times n$ tienen $4 \cdot (n-1)$ cuadrados en el borde. Como $268 = 4 \cdot 67$ se tiene entonces que $n - 1 = 67$, es decir, $n = 68$ y el área del cuadrado es $68 \cdot 68 = 4624$

3. Un agricultor prepara el terreno para la siembra de árboles frutales. Por la forma y el tamaño de la finca va a sembrar 70 filas, de modo que cada una tiene 4 árboles más que la fila anterior. Si en la fila 4 solo puede sembrar 17 árboles entonces, ¿cuántos árboles puede sembrar el agricultor en su totalidad?
   (a) 11 190
   (b) 11 010
   (c) 10 110
   (d) 10 010

- Opción correcta: (d)
- Solución: Si la fila 4 tiene 17 árboles entonces la fila 3 tiene 13 árboles, la fila 2 tiene 9 árboles y la primer fila tiene 5 árboles. De esta forma, se puede establecer una sucesión aritmética de la forma $a_n = 4n + 1$, con n la cantidad de filas. Al ser 70 filas, entonces la última fila tendrá $a_{70} = 4 \cdot 70 + 1 = 281$
  Ahora se debe determinar la suma total de árboles, es decir,

$$
\begin{aligned}
s &= 5 + 9 + 13 + 17 + \cdots + 281 \\
&= (4 \cdot 1 + 1) + (4 \cdot 2 + 1) + (4 \cdot 3 + 1) + (4 \cdot 4 + 1) + \cdots + (4 \cdot 70 + 1) \\
&= 4(1 + 2 + 3 + \ldots + 70) + 70 \\
&= 4\frac{70 \cdot 71}{2} + 70 \\
&= 4 \cdot 2485 + 70 \\
&= 10\,010
\end{aligned}
$$

4. Sean abc, bca y cab números de tres cifras tal que $abc + bca + cab = 2\,220$. Entonces el valor de $(a + b + c)^2$ corresponde a
   (a) 100
   (b) 256
   (c) 400
   (d) 1 296

- Opción correcta: (c)

- Solución:Al utilizar la notación desarrollada de un número se tiene que

$$\begin{aligned} abc + bca + cab &= 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b \\ &= 111a + 111b + 111c \\ &= 111(a + b + c) \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} 111(a + b + c) = 2220 \\ a + b + c = 20 \end{aligned}$$

Finalmente, $(a + b + c)^2 = 400$

5. La suma de todos los números enteros positivos menores que 1 000 que tienen exactamente 5 divisores distintos corresponde a
   (a) 16
   (b) 97
   (c) 722
   (d) 978

- Opción correcta: (c)
- Solución: Los únicos números enteros que cumplen con la condición son los números de la forma p^4, donde p es primo. Como $6^4 = 1296$, entonces p puede ser 2, 3 y 5. En este caso $2^4+3^4+5^4 = 722$.

6. Si x y y son dos números reales distintos tales que

$$\begin{cases} x^2 = 5x + 3y \\ y^2 = 5y + 3x \end{cases}$$

Entonces el valor de $x^2 + y^2$ es igual a
   (a) 8
   (b) 16
   (c) 34
   (d) 64

- Opción correcta: (b)
- Solución: Observe que $x^2+y^2 = (5x+3y)+(3x+5y) = 8(x+y)$. Además, utilizando fórmulas notables, $x^2-y^2 = (5x+3y)-(5y+3x) = (x+y)(x-y)$, pero también $x^2-y^2 = 2(x-y)$ restando las igualdades dadas; es decir, $(x+y)(x-y) = 2(x-y)$. Como $x \neq y$ entonces $x+y = 2$ y $x^2+y^2 = 16$.

7. La cantidad de números de cuatro cifras, menores a 5 000, con la forma $a6b5$ y que son divisibles por los primeros tres números primos impares es
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4

- Opción correcta: (b)
- Solución: Los números $a6b5$ son divisible por $3, 5$ y 7. Al ser divisibles por 3 se tienen $a+6+b+5 = 3k$ con k entero, implica $a+b+5 = 3m$ con m entero. Usando el criterio de divisibilidad de 7, se tienen que $a6b - 10$ es divisible por 7.
  Como $a6b - 10 = a5b$ entonces el numero $a5b$ debe ser divisible por 7.
  Esto es $a5 - 2 \cdot b = 7n$ con n entero. Considerando esto se tienen que los valores de los dígitos a yb son

a	1	2	2	3	3	4
b	4	2	9	0	7	5

  Teniendo estos valores de a y b, comprobamos los que cumplen $a+b+5 = 3m$, estos son $a = 2$ y $b = 2$ o $a = 3$ y $b = 7$.
  Por tanto hay dos números que cumplen todas las condiciones: 2 625 y 3 675.

8. Considere un triángulo rectángulo en el que uno de sus catetos mide $2\sqrt{7}$ cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 30°. Si x representa la medida del otro cateto y z representa la medida de su hipotenusa, ambas en centímetros, se puede asegurar que
   (a) $x \tan 30^\circ + z \operatorname{sen} 30^\circ = 4\sqrt{7}$
   (b) $x \tan 30^\circ + z \operatorname{sen} 30^\circ = 2\sqrt{7}$
   (c) $x \tan 30^\circ + z \cos 30^\circ = 4\sqrt{21}$
   (d) $x \tan 30^\circ + z \cos 30^\circ = \sqrt{21}$

- Opción correcta: (a)
- Solución:
  Para el triángulo descrito en el enunciado, $\tan 30^\circ = \dfrac{2\sqrt{7}}{x} \Rightarrow x \tan 30^\circ = 2\sqrt{7}$. Por otra parte, $\operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{2\sqrt{7}}{z} \Rightarrow z \operatorname{sen} 30^\circ = 2\sqrt{7}$
  Por lo anterior $x \tan 30^\circ + z \operatorname{sen} 30^\circ = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

9. En el triangulo acutángulo $\triangle MNR$, Y es el punto medio de $\overline{MR}$ y X es el punto medio de $\overline{MN}$. L es el pie de la altura del $\triangle MNR$ desde N. El punto medio de $\overline{LN}$ es K. Los puntos T y S son puntos en $\overline{MX}$ de manera que $MT = TS = SX$. Determine la razón de las áreas $\triangle TSR$ entre $\triangle RYK$, es decir, $\dfrac{(TSR)}{(RYK)}$.

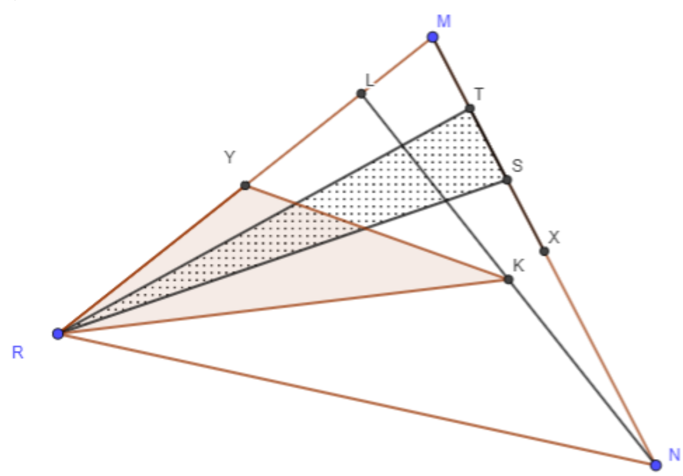
   (a) $\dfrac{1}{3}$

   (b) $\dfrac{2}{3}$

   (c) 1

   (d) $\dfrac{3}{2}$

- Opción correcta: (b)
- Solución:



Considere que X es el punto medio de $\overline{MN}$ y $MT = TS = SX$ se tiene que $TS = \dfrac{MN}{6}$.
Tanto el triángulo $\triangle TSR$ como el triángulo $\triangle MNR$ tienen la misma altura tomando a $\overline{MN}$ y $\overline{TS}$ como bases.
$\Rightarrow (TSR) = \dfrac{(MNR)}{6}$
De manera similar se tiene que Y es el punto medio de $\overline{MR}$ y K es el punto medio de $\overline{LN}$.
Considere $\overline{RY}$ como base del triángulo $\triangle RYK$ y $\overline{LK}$ como la altura. $\overline{MR}$ como la base y $\overline{LN}$ como la altura del $\triangle MNR$. Se tiene que tanto la base como la altura del $\triangle RYK$ son la mitad de las correspondientes en el $\triangle MNR$.
$\Rightarrow (RYK) = \dfrac{(MNR)}{4}$

$$\Rightarrow \frac{(TSR)}{(RYK)} = \frac{\dfrac{(MNR)}{6}}{\dfrac{(MNR)}{4}} = \frac{2}{3}$$

10. Si el máximo común divisor de $2^{2020} + 2019$ y $2^{2020} + 2020$ es a y el mínimo común múltiplo de b y $b + 1$ es 12, entonces el valor de $a + b$ corrresponde a
    (a) 3
    (b) 4
    (c) 5
    (d) 2020

- Opción correcta: (b)
- Solución: Se tiene que $2^{2020} + 2019$ y $2^{2020} + 2020$ son consecutivos, son primos relativos, por lo tanto el valor de $a = 1$. Por otro lado se tiene que $mcm(b, b + 1) = 12$. Se procede a ver los siguientes casos:

  Cuando $b = 1$, se tiene que $mcm(1, 2) = 2$.

  Cuando $b = 2$, se tiene que $mcm(2, 3) = 6$.

  Cuando $b = 3$, se tiene que $mcm(3, 4) = 12$.

  Cuando $b = 4$, se tiene que $mcm(4, 5) = 20$. Excede a $mcm(b, b + 1) = 12$.

  Por lo anterior, el caso que nos sirve, cuando $b = 3$. Por lo tanto, el valor $a + b = 1 + 3 = 4$.

11. Un dado de seis caras se lanza tres veces. Si el número obtenido en el tercer lanzamiento es igual a la suma de los números obtenidos en los dos primeros, ¿cuál es la probabilidad de que el 2 haya salido al menos una vez?
    (a) $\frac{1}{6}$
    (b) $\frac{91}{16}$
    (c) $\frac{1}{2}$
    (d) $\frac{8}{15}$

- Opción correcta: (d)
- Solución: Primero se determina los posibles resultados de los tres lanzamientos, es decir, el espacio muestral, esto es $E = \{(1, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 1, 3), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (3, 1, 4), (1, 4, 5), (2, 3, 5), (3, 2, 5), (4, 1, 5), (1, 5, 6), (2, 4, 6), (3, 3, 6), (4, 2, 6), (5, 1, 6)\}$.
  Observe que en 8 de estas 15 posibilidades aparece al menos un 2, por lo tanto la probabilidad pedida es $\frac{8}{15}$.

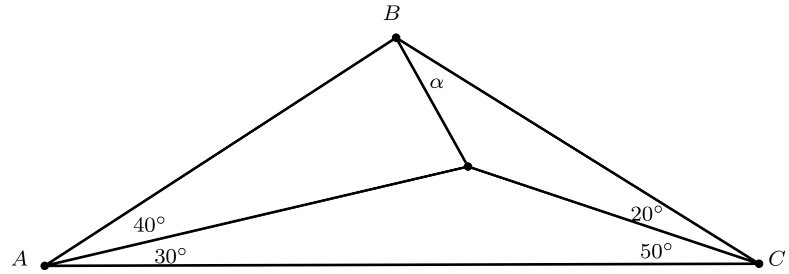
12. De acuerdo con los datos de la figura, la medida del ángulo α es

(a) 10°

(b) 15°

(c) 20°

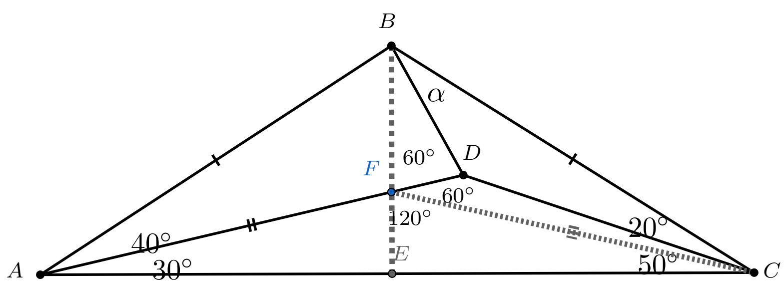
(d) 30°



- Opción correcta: (a)
- Solución: Observe que la figura se trata de un triángulo isósceles, ya que $m\angle A = m\angle C$, por lo que se cumple $AB = BC$. Si se traza la altura, $\overline{BE}$, sobre $\overline{AC}$ se obtiene otro triángulo isósceles AFC, siendo F el punto de intersección de la altura $\overline{BE}$ con $\overline{AD}$; como $m\angle FAC = 30°$ debe ser igual a $m\angle FCA$ esto es 30° grados, entonces, se concluye lo siguiente: $m\angle AFC = 120°$, $m\angle DFC = 60°$ y $m\angle BFD = 120°$.

  Ahora, observe que en el triángulo BFC en el punto D concurren las bisectrices, ya que $m\angle FCD = m\angle BCD = 20°$ (observe el ángulo FCD se obtiene al restarle 30° a 50° del ángulo ACD) y $m\angle CFD = m\angle BFD = 60°$, por lo tanto se puede concluir que $m\angle FBD = m\angle DBC \Rightarrow m\angle FBD = m\angle\alpha, \Rightarrow m\angle DBC = 2 \cdot m\angle\alpha$.

  Por suma de ángulo internos $m\angle FBC = 180° - 60° - 60° - 20° - 20 \Rightarrow m\angle FBC = 20°$, por lo que se obtiene $m\angle FBC = m\angle FBD + m\angle\alpha \Rightarrow 20° = 2 \cdot m\angle\alpha \Rightarrow m\angle\alpha = 10°$.



13. Si α y β son números enteros positivos que satisfacen la ecuación $\alpha^\alpha \cdot (3\alpha+1)^\alpha \cdot (8\alpha+1)^\beta \cdot (5\alpha+1)^\beta = 36\,652$, entonces el valor de $\alpha - \beta$ corresponde a

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 5

- Opción correcta: (b)
- Solución: Se procede a descomponer en factores primos el número 36 652 se obtiene $2^2 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 11$. Al comparar la descomposición canónica del número con el lado izquierdo de la ecuación se concluye que $\alpha = 2$ y $\beta = 1$. Por lo tanto, el valor de $\alpha - \beta = 2 - 1 = 1$.

14. Ana está jugando a lanzar dardos a un blanco circular en que se asignan diferentes puntos según la región en la que caiga el dardo. Se sabe que obtuvo 99 puntos en total, que sólo atinó a la zona de 5, 8 y 10 puntos, que atinó la misma cantidad de lanzamientos en la zona de 8 que en la de 10 puntos. Si además se sabe que sólo acertó el 75 % de sus lanzamientos, la cantidad total de lanzamientos que realizó Ana es

    (a) 16

    (b) 20

    (c) 28

    (d) 32

- Opción correcta: (b)
- Solución: Observe que se puede denotar por a la cantidad de lanzamientos acertados en la zona de 5 puntos y b a la cantidad de lanzamientos acertados en las zonas de 8 y 10 puntos (por hipótesis son iguales).

  Ahora, se establece la relación entre los datos:

  $$5a + 8b + 10b = 99$$

  Ya que Ana obtuvo 99 puntos.

  Ahora, observe que, 99 es múltiplo de 3, por los que $5a + 18b$ también debería serlo, en este caso $18b$ es múltiplo de 3 sin importar el valor de b, pero $5a$ indica que a debe ser múltiplo de 3, es decir, un número en el conjunto $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$.

  Por otra parte, 99 es un número impar, esto quiere decir que $5a + 18b$ debe ser impar, pero $18b$ es par sin importar el valor de b, por lo que $5a$ debe ser impar y esto sólo ocurre si a es impar.

  Por lo tanto, se procede a probar los números impares múltiplos de 3 que son posibles soluciones, veamos:

  - Para $a = 3$, se tiene $5a + 18b = 99 \Rightarrow 5 \cdot 3 + 18b = 99 \Rightarrow 18b = 99 - 15 \Rightarrow 18b = 84 \Rightarrow b = \frac{84}{18}$, lo cual no es posible.
  - Para $a = 9$, se tiene $5a + 18b = 99 \Rightarrow 5 \cdot 9 + 18b = 99 \Rightarrow 18b = 99 - 45 \Rightarrow 18b = 54 \Rightarrow b = \frac{54}{18} \Rightarrow b = 3$, lo cual si es posible.
  - Para $a = 15$, se tiene $5a + 18b = 99 \Rightarrow 5 \cdot 15 + 18b = 99 \Rightarrow 18b = 99 - 75 \Rightarrow 18b = 24 \Rightarrow b = \frac{24}{18}$, lo cual no es posible.

  Observe que para valores mayores de 15 ya no tiene sentido, además, observe que funciona para $a = 9$ si funciona, esto daría como resultado $a = 9$, $b = c = 3$.

  Por lo tanto, Ana realizó 9 lanzamientos acertados en la zona de 5 puntos, 3 lanzamientos acertados en la zona de 8 puntos y 3 lanzamientos acertados en la zona de 10 puntos.

  Como Ana acertó 75 % de los lanzamientos y ella acertó $9 + 3 + 3 = 15$ lanzamientos, esto quiere decir que Ana realizó 20 lanzamientos.

15. Sean x y y dos números reales distintos tales que:

$$x^2 + x = 2y^2 + y = 50x - 49y$$

El valor de $x + y$ corresponde a

(a) 10

(b) 15

(c) 20

(d) 24

- Opción correcta: (d)
- Solución: Se tiene que $x^2 + x = 50x - 49y \Rightarrow x^2 = 49x - 49y \Rightarrow x^2 = 49(x - y)$. Por otro lado se tiene que $2y^2 + y = 50x - 49y \Rightarrow 2y^2 = 50x - 50y \Rightarrow y^2 = 25(x - y)$.

  Luego se puede obtener lo siguiente: $x^2 - y^2 = 49(x - y) - 25(x - y) \Rightarrow (x - y)(x + y) = 24(x - y)$.

  Como x y y son distintos, entonces $x - y \neq 0$. Por lo tanto, $x + y = 24$.

16. Sea $N = 2^{2020}$. La cifra de las unidades del número $N + (N + 2) + (N + 4)$ corresponde a

(a) 0

(b) 2

(c) 4

(d) 6

- Opción correcta: (c)
- Solución: Se puede observar que el dígito de las unidades de las potencias de 2 se repiten periódicamente cada 4 valores, específicamente, las potencias con exponente múltiplo de 4 terminan en 6 ($2^4 = 16,\ 2^8 = 256,\ 2^{12} = 4096$). Como $2020 = 505 \cdot 4$ entonces el último dígito de 2^{2020} es el mismo que el de 2^4, que es 6. En este caso, es claro que los respectivos últimos dígitos de $N + 2$ y $N + 4$, son 8 y 0 respectivamente. Luego, el último dígito de $N + (N + 2) + (N + 4)$ es 4.

17. Los vértices de un cuadrado $PQRS$ están sobre una misma circunferencia T. Si se sabe que el perímetro de la circunferencia T es $\pi^2\sqrt{3}$, entonces el área de la región que está fuera del $\square PQRS$ pero dentro de la circunferencia T correspode a

(a) $\dfrac{3\pi^2}{4}(\pi-2)$

(b) $\dfrac{3\pi^2}{2}(\pi-2)$

(c) $\dfrac{3\pi^2}{2}(2\pi-1)$

(d) $\dfrac{3\pi^2}{4}(2\pi-1)$

- Opción correcta: (a)

- Solución: Si r representa el radio de la circunferencia T, entonces $2\pi r = \pi^2\sqrt{3} \Rightarrow r = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

  El diámetro de la circunferencia corresponde con la diagonal del cuadrado; así, si d es la diagonal del cuadrado, entonces $d = 2r = 2\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2} = \pi\sqrt{3}$.

  Si x representa la medida de cada uno de los lados del cuadrado $\square PQRS$, entonces $x^2 + x^2 = 3\pi^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{3\pi^2}{2}$ representa el área del cuadrado.

  El área de la circunferencia T está dada por $\pi r^2 = \pi\left(\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3\pi^3}{4}$.

  Luego, el área A delimitada por las figuras corresponde a $A = \dfrac{3\pi^3}{4} - \dfrac{3\pi^2}{2} = \dfrac{3\pi^2}{4}(\pi-2)$.

18. Considere la ecuación $mx + (k-2)\,y = 3$ en la que x, y, k y m son números reales, tales que $m > 0$ y $k \neq 2$. Con certeza se tiene que $y > 0$ si se cumple que

(a) $x < \dfrac{3}{m}$ y $k > 2$

(b) $x > \dfrac{3}{m}$ y $k > 2$

(c) $x < \dfrac{3}{m}$ y $k > -2$

(d) $x > \dfrac{3}{m}$ y $k > -2$

- Opción correcta: (a)

- Solución: $mx + (k-2)\,y = 3 \Rightarrow (k-2)\,y = 3 - mx \Rightarrow y = \dfrac{3-mx}{k-2}$.

  Luego, $y > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3-mx}{k-2} > 0$. Para los siguientes despejes en inecuaciones, note que $m > 0$.

Una posibilidad es que $k-2<0$ y $3-mx<0$, lo que se cumple si $k<2$ y $\dfrac{3}{m}<x$.

Otra posibilidad es que $k-2>0$ y $3-mx>0$, lo que se cumple si $k>2$ y $\dfrac{3}{m}>x$, que corresponde con la opción correcta.

19. Hay un grupo de 12 corredores llamados corredor 1, corredor 2, ... , corredor 12. Los nombres les fueron asignados porque el corredor k tarda exactamente k minutos dando una vuelta a una pista circular de carreras. Si todos empiezan a correr en el mismo punto y en la misma dirección, recorriendo varias vueltas siempre en el mismo tiempo indicado para cada uno, entonces la mínima cantidad de minutos que deben transcurrir para que todos los doce pasen simultáneamente por el punto de salida es 27 720 minutos. Sea $T>0$ el menor tiempo en minutos, tal que al menos 5 de los corredores pasan simultáneamente por el punto de salida. Entonces la suma de los dígitos de T corresponde a

   (a) 2

   (b) 3

   (c) 4

   (d) 7

- Opción correcta: (b)

- Solución: Observe que el corredor k estará de nuevo en el punto de partida después de t minutos si y solo si k divide a t. Defina $M(t)$ siendo el número de enteros k, tales que $1\leq k\leq 12$, y $k\mid t$. Entonces se puede comprobar que se cumple la siguiente tabla:

t	1	2	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$M(t)$	1	2	2	2	4	2	4	3	4	2	5	2	4	4	5

de donde se puede ver que la primera vez que hay cinco de nuevo en el punto de partida es después de 12 minutos. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (b).

Otra forma.
Se necesitan 5 números cuyo mínimo común múltiplo sea el mismo. Como se pide el menor, es lógico pensar que esto ocurra en los números menores. Observe que $mcm(1,2,3,4)=12$, y también 12 es múltiplo de 6, es decir, $mcm(1,2,3,4,6)=12$. Por lo tanto, 12 satisfece lo pedido. De hecho, observe que hay 6 corredores que después de 12 minutos pasan simultáneamente por el punto de salida, pues $mcm(1,2,3,4,6,12)=12$

20. El triángulo $\triangle ABC$ satisface que $m\angle A = 60°$ y $m\angle B = 90°$. Los puntos D, E, F sobre los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, son tales que el $\triangle DEF$ es equilátero y $\overline{EF}$ es paralelo a $\overline{BC}$. Si el perímetro del $\triangle ABC$ es 5, entonces el área del $\triangle DEF$ es igual a:

    (a) $\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$

    (b) $2 - \sqrt{3}$

    (c) $\sqrt{3} - \frac{3}{2}$

    (d) $2\sqrt{3} - 3$

- Opción correcta: (c)

- Solución: Sea l el lado del triángulo equilátero DEF. Como EF es paralelo a BC y el triángulo DEF es equilátero, entonces $\angle FBD = \angle EDC = 60°$ (por ángulos entre paralelas). Esto implica que los triángulos ABC, AFE, FBD y DEC son semejantes (con los vértices en ese orden exacto). Usando las propiedades básicas del triángulo $30° - 60°$, procedemos a calcular los lados AF, FB, BD, DC, CE y EA:

$$AF = \frac{l}{\sqrt{3}}, \quad FB = \frac{l\sqrt{3}}{2}, \quad BD = \frac{l}{2}, \quad DC = 2l, \quad CE = l\sqrt{3}, \quad EA = \frac{2l}{\sqrt{3}}.$$

La suma de esto nos da el perímetro del triángulo, por lo que obtenemos

$$5 = \frac{l}{\sqrt{3}} + \frac{l\sqrt{3}}{2} + \frac{l}{2} + 2l + l\sqrt{3} + \frac{2l}{\sqrt{3}} = \frac{5l(1+\sqrt{3})}{2},$$

de donde $l = 2/(1+\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$. De esta forma concluimos que el área del triángulo DEF es igual a

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}-6}{4} = \sqrt{3} - \frac{3}{2}.$$