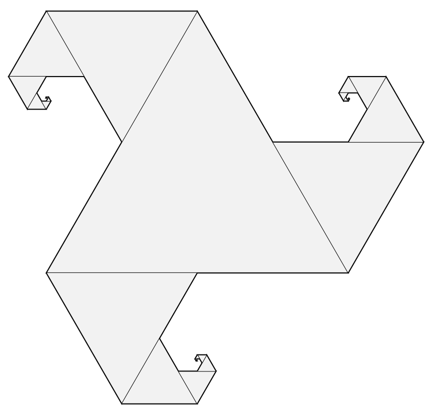
XXXIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UNED - MICITT

SOLUCIÓN
PRIMERA ELIMINATORIA NACIONAL



Nivel III

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2021

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2021 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.

La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en el cuestionario virtual.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

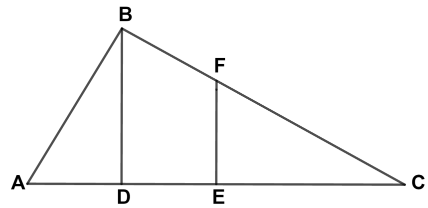
1. En la figura, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ y $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$. Si $AD = 14$, $DC = 36$ y el área del triángulo ABC es el doble que el área del triángulo EFC, entonces la medida de $\overline{EC}$ corresponde a

   (a) 15

   (b) 18

   (c) 25

   (d) 30



- Opción correcta: (d)
- Solución: Note que BD y FE son alturas respectivas de los triángulos ABC y EFC. Sea $H = BD$, $h = EF$ y $x = EC$.

  Se tiene que $(ABC) = 25H$ y $(EFC) = \dfrac{xh}{2}$.

  Por semejanza, se obtiene que $\dfrac{H}{h} = \dfrac{36}{x}$ y así $x = \dfrac{36h}{H}$.

  Luego, como $(ABC) = 2(EFC)$, entonces se tiene que $25H = xh$ y sustituyendo la x, se obtiene que $5H = 6h$ y $h = \dfrac{5H}{6}$.

  Finalmente, se tiene que $x = \dfrac{36 \cdot \frac{5H}{6}}{H} = 30$.

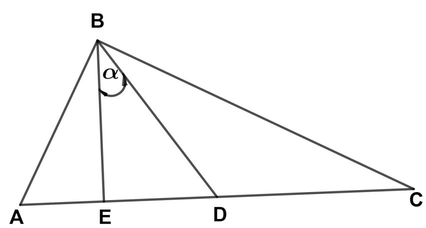
2. En la figura, $\overline{BE}$ y $\overline{BD}$ son la altura y la mediana respectivas del triángulo ABC. Si $m\angle BAC = 60^\circ$ y $m\angle ACB = 30^\circ$, entonces $\tan\alpha$ corresponde a

   (a) $3 + \sqrt{3}$

   (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

   (c) $\dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}$

   (d) $\dfrac{3 + \sqrt{3}}{3}$



- Opción correcta: (b)
- Solución: Sea $x = ED$ y $BE = h$. Como $\overline{BD}$ es mediana del $\triangle ABC$, entonces $AD = CD$. Se tiene entonces que $CD = AE + x$.

  Luego, $\tan 60^\circ = \dfrac{h}{AE} \Longrightarrow AE = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$ y $\tan 30^\circ = \dfrac{h}{2x + AE} \Longrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}h}{3}$.

  Así, $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Sean a y b números enteros, tales que al menos uno de ellos es positivo y $a+5b<40$.
   ¿Cuántas parejas (a,b) satisfacen que $\dfrac{a^2+b^{-2}}{a^{-2}+b^2}=9$?

   (a) 4

   (b) 19

   (c) 23

   (d) Infinitas

- Opción correcta: (d)

- Solución: Note que

$$\frac{a^2+b^{-2}}{a^{-2}+b^2}=\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+b^2}=\frac{\frac{a^2b^2+1}{b^2}}{\frac{a^2b^2+1}{a^2}}=\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=9$$

$$\frac{a}{b}=\pm 3$$

$$a=\pm 3b$$

  a) Si $a=3b$ entonces $a+5b=3b+5b=8b<40$, por tanto $b<5$. Para que al menos uno sea positivo entonces $0<b<5$, con lo cual hay 4 pares ordenados.

  b) Si $a=-3b$ entonces $a+5b=-3b+5b=2b<40$, por tanto $b<20$. Como a y b tiene signos contrarios hay una infinidad de pares ordenados.

4. En una reunión, respetando el distanciamiento, participan 20 personas. De estas, 15 se conocen entre ellos, mientras que los otros 5 no conocen a ninguno de los participantes. Los que se conocen, se saludan chocando los codos, mientras que los que no se conocen, saludan levantando la mano. ¿Cuántos saludos levantando la mano ocurren?

   (a) 75

   (b) 85

   (c) 95

   (d) 100

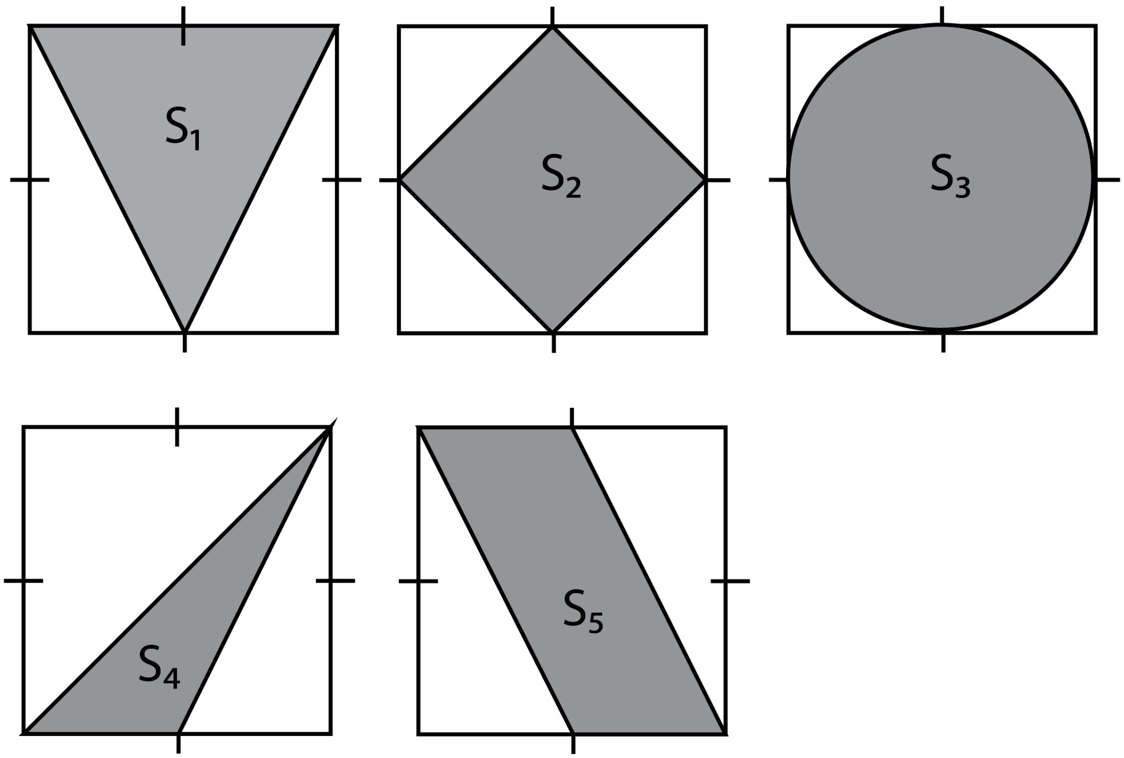
- Opción correcta: (b)

- Solución:

  Cada una de las 15 personas que conoce a las demás saluda a 5 personas levantando la mano. Por otro lado, las 5 personas que no conocen a nadie saludan a 19 personas levantando la mano. Como cada saludo se cuenta dos veces, entonces la cantidad total es

$$\frac{15\times 5+5\times 19}{2}=85.$$

5. Los cuadrados de la figura son todos iguales, en ellos se han marcado los puntos medios de sus lados. En cada cuadrado se ha sombreado un área y se le ha llamado a la medida de esas áreas sombreadas $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5$ tal como se muestra.



Sea L el área de uno de los cuadrados. De las siguientes relaciones, la que es CIERTA es

(a) $S_2 + S_5 + S_1 < S_4 + S_3$

(b) $S_1 + S_2 < S_4 + S_5$

(c) $S_4 \leq S_5 = S_1 = S_3 \leq S_2$

(d) $S_5 + S_3 \geq \dfrac{5L}{4}$

- Opción correcta: (d)
- Solución: Se puede observar que cada área sombreada esta determinada por cuartas partes a excepción del círculo.

  $S_1 = \dfrac{2L}{4}$

  $S_2 = \dfrac{2L}{4}$

  $S_3 > \dfrac{3L}{4}$

  $S_4 = \dfrac{L}{4}$

  $S_5 = \dfrac{2L}{4}$

  Comparando áreas obtenemos que $S_5 + S_3 \geq \dfrac{5L}{4}$

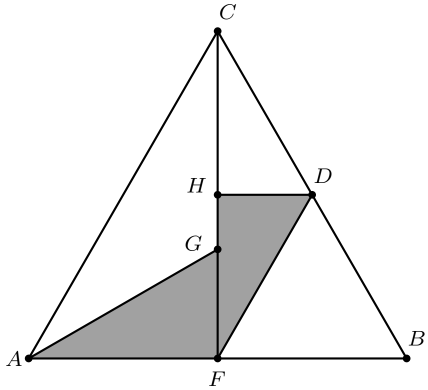
6. El menor entero positivo que tiene residuo 4 cuando se divide por 7 y residuo 5 cuando se divide por 12, está entre

   (a) 32 y 42
   (b) 51 y 58
   (c) 60 y 72
   (d) 76 y 84

- Opción correcta: (b)
- Solución: Dado que el número deja residuo 5 cuando se divide por 12, es de la forma $12n+5$. Ahora bien, $12n+5=7n+5n+5=7n+5(n+1)$, de manera que cuando se divide por 7 deja el mismo residuo que deja $5(n+1)$ cuando se divide por 7. Ahora bien, el menor n para el cual $5(n+1)$ deja residuo 4 cuando se divide por 7 es para $n=4$. Se sigue que el menor número es $12\cdot 4+5=53$

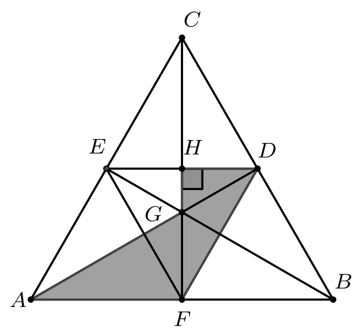
7. En el triángulo equilátero $\triangle ABC$, los puntos A, G, D son colineales, con D punto medio del $\overline{BC}$, además $\overline{CF}$ es una altura del $\triangle ABC$ y $\overline{HD}$ es perpendicular a $\overline{CF}$. Si el trapecio $\square ACDF$ tiene un área de 18 cm^2 entonces el área, en cm^2, del polígono $AFDHG$ corresponde a

   (a) 9
   (b) 8
   (c) 7
   (d) 6



- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Completando la figura como se muestra a continuación, se observa que el trapecio $ACDF$ es formado por tres triángulos equiláteros de área 6 cm^2, además el triángulo EFD es formado por 6 triángulos de área 1 cm^2 y el triángulo AFE es formado por 2 triángulos de área 3 cm^2. Por tanto el área del poligono $AFDHG$ es 7 cm^2



8. Sean x_1 y x_2 números reales tales que $x_2 > x_1$. Si $x_1 + x_2 = 4$ y $x_1 x_2 = \frac{1}{2}$, entonces el cociente $\frac{x_1}{x_2}$ es un número

   (a) irracional
   (b) entero primo
   (c) entero compuesto
   (d) racional no entero

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Como x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación, se puede expresar como $2(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Desarrollando se obtiene

$$2\left[x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2\right] = 2\left(x^2 - 4x + \frac{1}{2}\right) = 2x^2 - 8x + 1 = 0$$

  Aplicando fórmula general se tiene $x_1 = \frac{4 - \sqrt{14}}{2}$, $x_2 = \frac{4 + \sqrt{14}}{2}$, por lo que

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{4 - \sqrt{14}}{4 + \sqrt{14}} = 15 - 4\sqrt{14}$$

  Lo cual es un número irracional.

9. Una hormiga camina por un teclado numérico como el de la figura, moviéndose de un número a otro de manera horizontal o vertical; empieza en el número 1 y termina su recorrido al llegar a la tecla del 0 por primera vez. Considere el número n formado al concatenar los dígitos que recorre hasta finalizar. De las siguientes afirmaciones

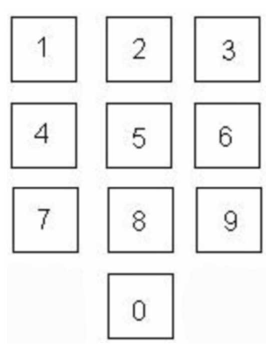
   I. n es divisible por 3

   II. n es divisible por 4

   III. n posee un número impar de dígitos

   con total certeza se puede afirmar que son verdaderas

   (a) La I y la II
   (b) La II y la III
   (c) La I y la III
   (d) Todas



- Opción correcta: (b)

- Solución:

  La primera es falsa dado que al moverse de forma vertical, los dígitos aumentan en múltiplos de 3, pero para llegar del 1 al cero, debe recorrer parcialmente un fila horizontal por lo que la suma de dígitos no sera divisible por 3.

  La segunda es verdadera porque los últimos dos dígitos de n son 8,0 y el 80 es divisible por 4

  La tercera es verdadera porque las rutas más rápidas de la hormiga contienen 5 dígitos, por ejemplo el número 12580, cualquier otra ruta requiere aumentar un número par de movimentos, por lo que el número de dígitos siempre será impar.

10. La suma de las cifras del menor número natural que al ser dividido por 195, 117 y 975 tiene como residuo 75, corresponde a
    (a) 3
    (b) 18
    (c) 21
    (d) 27

- Opción correcta: (a)
- Solución: Calculamos el mínimo común múltiplo de 195, 117 y 975 y le sumamos 75, de esa manera obtenemos el número 3000 y la suma de sus cifras es 3.

11. Una forma de escribir el número 2021 como una suma de enteros positivos consecutivos crecientes es $1010 + 1011$. La cantidad total (incluyendo $1010 + 1011$) de formas en que 2021 se puede escribir como suma de dos o más enteros positivos consecutivos crecientes es
    (a) 1
    (b) 2
    (c) 3
    (d) 4

- Opción correcta: (c)
- Solución: Buscamos enteros positivos m y n tal que

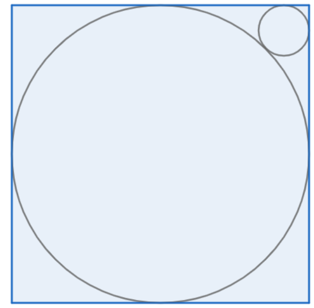
$$2021 = m + (m+1) + \ldots + (m+n) = (n+1)m + (1+2+\ldots+n) = (n+1)m + \frac{n(n+1)}{2}.$$

  Lo anterior implica que $2 \cdot 2021 = (n+1)(2m+n)$ y observamos que $2m+n > n+1 > 1$, es decir, el factor $n+1$ es el menor y ambos factores son mayores que 1. El número $2 \cdot 2021$ se factoriza como $2 \cdot 43 \cdot 47$ y por lo tanto las posibles combinaciones son

$$n+1 = 2,\ 2m+n = 2021, \qquad n+1 = 43,\ 2m+n = 2\cdot 47, \qquad n+1 = 47,\ 2m+n = 2\cdot 43.$$

  Estas nos dan en efecto tres soluciones: $(m,n) = (1010,1), (26,42), (20,46)$.

12. Considere un cuadrado con un círculo de radio R tangente a sus cuatro lados y un círculo de radio r tangente a dos de sus lados y al círculo de radio R, como se muestra en la figura. Entonces el cociente R/r es igual a



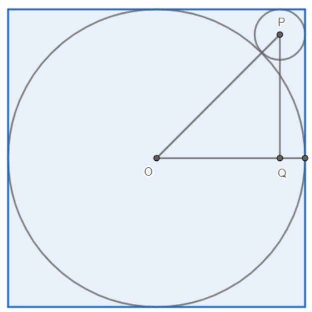
(a) $4+\sqrt{2}$

(b) $2+2\sqrt{3}$

(c) $4+\sqrt{3}$

(d) $3+2\sqrt{2}$

- Opción correcta: (d)
- Solución: Sean O y P los centros de los círculos y sea Q el pie de la perpendicular desde P al radio perpendicular al lado del cuadrado, como en la figura.



El triángulo OPQ es un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden $R-r$ y su hipotenusa mide $R+r$. Por lo tanto,

$$R+r=\sqrt{2}(R-r) \Longrightarrow (\sqrt{2}-1)R=(\sqrt{2}+1)r \Longrightarrow \frac{R}{r}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}.$$

13. Sean x y y números reales no nulos tales que

$$\frac{5x+y}{x-5y}=3$$

Entonces el valor de $\dfrac{5y+x}{y-5x}$ es igual a

(a) $\frac{3}{41}$

(b) $-\frac{3}{41}$

(c) $\frac{41}{3}$

(d) $-\frac{41}{3}$

- Opción correcta: (b)

- Solución: Observe que $\dfrac{5x+y}{x-5y} = 3$ implica que $5x+y = 3x-15y$, despejando x en términos de y se obtiene que $x=-8y$. Sustituyendo en la expresión solicitada se obtiene que

$$\frac{5y+x}{y-5x} = \frac{5y+(-8y)}{y-5(-8x)} = \frac{-3y}{41y} = -\frac{3}{41},$$

porque $y \neq 0$.

14. Sea n un número natural. Sea $p = n^4 + 4n^2 + 3$. Si se sabe que p es primo, entonces necesariamente se cumple que la suma de los dígitos de 2021^{p-1} es igual a

 (a) 16

 (b) 20

 (c) 24

 (d) 25

- Opción correcta: (d)

- Solución:

 Observe que $n^4+4n^2+3 = (n^2+1)(n^2+3)$. Como p es primo entonces necesariamente debe cumplirse que $n^2+1=1$, de donde $n=0$ y $p=3$. En consecuencia $2021^{p-1} = 2021^2 = 4084441$. Y la suma de los dígitos es igual a 25.

15. Sean a, b números reales con $a > b$ tales que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 3$ entonces el valor de $\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$ es

 $a)$ $\dfrac{-\sqrt{5}}{2}$

 $b)$ $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$

 $c)$ $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$

 $d)$ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

- Opción correcta: d).

- Solución: Note que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2+b^2}{ab} = 3$, así que $a^2+b^2 = 3ab$. Vea que

$$\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{(a+b)\cdot 2ab}{(a-b)\cdot 4ab} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{a-b},$$

Como

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} = \frac{5ab}{ab} = 5,$$

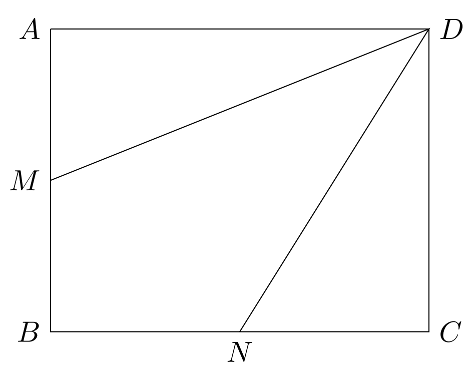
se sigue que $\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

16. Si los números de 6 dígitos de la forma: $4a62b1$ y $5c3ab4$ son ambos múltiplos de 3, con a, b y c dígitos. Un posible valor para c es

    a) 4
    b) 2
    c) 6
    d) 8

- Opción correcta: *a*)
- Solución: Como ambos números son múltiplos de 3, se sigue que ambas sumas $4+a+6+2+b+1 = 13+a+b$ y $5+c+3+a+b+4 = 12+a+b+c$ son múltiplos de 3, al restarlos, obtenemos que $c-1$ debe ser múltiplo de 3, por lo que c debe ser alguno de $1, 4$ o 7.

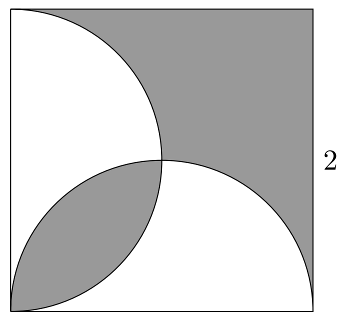
17. Sea $ABCD$ un rectángulo con $AB = 25$ cm, $AD = 20$ cm. Sean M y N los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, entonces el área en centímetros cuadrados, del cuadrilatero $MBND$ es



    a) 125
    b) 200
    c) 250
    d) 375

- Opción correcta: *c*)
- Solución: Note que cada uno de los triángulos $\triangle AMD$ y $\triangle NCD$ contiene un cuarto del área total del rectangulo, así que el el cuadrilatero $MBND$ contiene la mitad del área del rectangulo, esto es 250 cm^2.

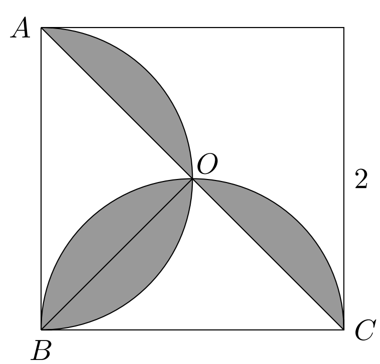
18. Se trazan dos semicírculos sobre los dos lados adyacentes de un cuadrado de lado 2. El área de la región sombreada es



   a) $1 + \pi/2$
   b) 2
   c) π
   d) 1

- Opción correcta: *b*).
- Solución:

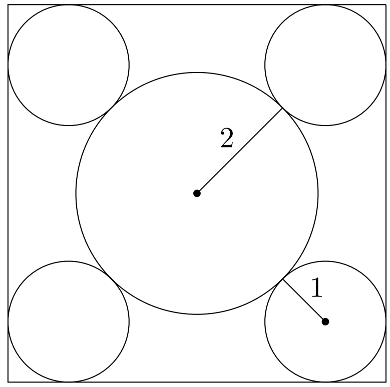
  Sea O el centro del cuadrado y sean A, B, C como en la figura de abajo, y notamos que el área de los sectores circulares con cuerda OB son iguales a las de los sectores círculares con cuerda AO y OC en los respectivos círculos, así que, vemos que el total del área sombreada es medio cuadrado, esto es 2.



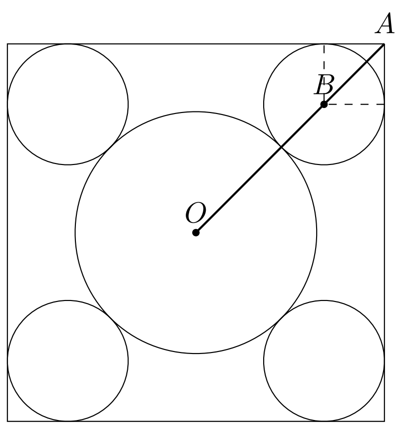
19. En la siguiente figura, el círculo central tiene radio 2 y los círculos pequeños son de radio 1 y tangentes externamente al de radio 2. Las tangentes a los círculos pequeños forman un cuadrado. La longitud del lado de este cuadrado es

   a) $3\sqrt{2} + 2$
   b) 6
   c) $4\sqrt{2}$
   d) 8

- Opción correcta: *a*).



- Solución: Sea O el centro del círculo grande, A un vértice del cuadrado y B el centro del círculo pequeño que se encuentra entre O y A. La distancia entre O a B es la suma de los radios que es 3, y como los pies de las perpendiculares de B al cuadrado, forman junto con A un cuadrado de lado 1, se sigue que $BA = \sqrt{2}$. Por lo tanto $OA = 3 + \sqrt{2}$, así que la diagonal del cuadrado mide $6 + 2\sqrt{2}$, por lo tanto, su lado mide $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 + 3\sqrt{2}$.



20. El equipo de fútbol OLCOMA consta de 13 jugadores (11 titulares y dos en banca), cada uno de ellos posee una camisa con un número entero positivo menor a 14 y distintos entre jugadores. La probabilidad de que al seleccionar 7 jugadores al azar, la suma de los números de sus camisas sea impar, corresponde a

   (a) $\dfrac{212}{429}$

   (b) $\dfrac{77}{156}$

   (c) $\dfrac{841}{902}$

   d) $\dfrac{53}{55}$

   Opción correcta: (a)

- Solución: La cantidad de maneras de escoger 7 jugadores de los 13 corresponde a $\binom{13}{7} = 1716$.

  Para que el resultado de una suma sea impar, debe haber una cantidad impar de números impares. Hay 7 números impares y 6 números pares. Estudiamos los casos favorables

  - 1 camisa impar y 6 camisas pares: $\binom{7}{1}\binom{6}{6} = 7$.
  - 3 camisas impares y 4 camisas pares: $\binom{7}{3}\binom{6}{4} = 525$.
  - 5 camisas impares y 2 camisas pares: $\binom{7}{5}\binom{6}{2} = 315$.
  - 7 camisas impares y 0 camisas pares $\binom{7}{7}\binom{6}{0} = 1$.

  Así, la probabilidad es
  $$\frac{7+525+315+1}{1716} = \frac{848}{1716} = \frac{212}{429}.$$