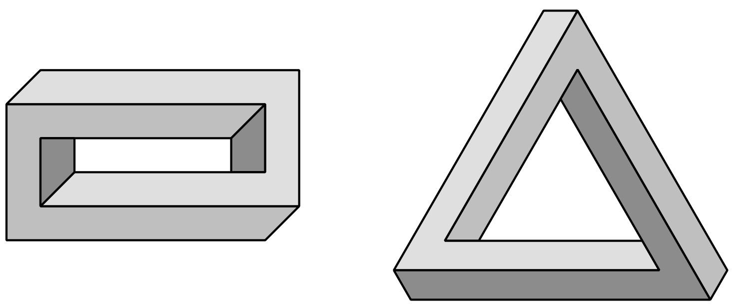
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL



I Nivel

(7°)

2017

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del lunes 02 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Pablo lanza una moneda de 50 colones al aire tres veces y anota, para cada lanzamiento, si cae escudo o corona. La probabilidad de que Pablo obtenga exactamente una corona o exactamente un escudo es

   (a) $\frac{1}{4}$

   (b) $\frac{1}{2}$

   (c) $\frac{3}{8}$

   (d) $\frac{3}{4}$

2. Sofía tiene cierta cantidad de caramelos; se come 30 % de ellos y le quedan 280 caramelos. Carol tiene la misma cantidad de caramelos que Sofía, pero se come 26 % de ellos. La cantidad de caramelos que Carol se come es

   (a) 30

   (b) 84

   (c) 104

   (d) 296

3. María dibujó un triángulo, tal que los lados miden números pares consecutivos y se sabe que el menor de ellos mide cuatro centímetros. Juan desea averiguar el área del triángulo equilátero que tiene el mismo perímetro que el triángulo que dibujó María. El área, en centímetros cuadrados, de este triángulo equilátero es

   (a) 24

   (b) 32

   (c) $6\sqrt{3}$

   (d) $9\sqrt{3}$

4. Al simplificar al máximo la expresión:

$$\sqrt[2017]{\frac{\left(k^{2017}\right)^{2017}}{k^{2017}}} - k$$

donde k es un número entero positivo, se obtiene

(a) 0

(b) 1

(c) $k\left(k^{2015} - 1\right)$

(d) $k\left(k^{2016} - 1\right)$

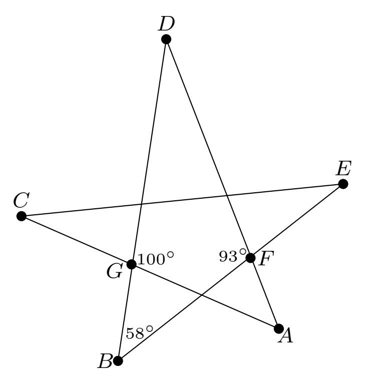
5. La figura adjunta muestra una estrella en forma de pentágono. La medida del $\angle CAD$ es

(a) $35°$

(b) $42°$

(c) $51°$

(d) $65°$



6. Considere el número $n = 7a\,931\,41b$ de ocho dígitos que es divisible por 792. El valor del dígito a es

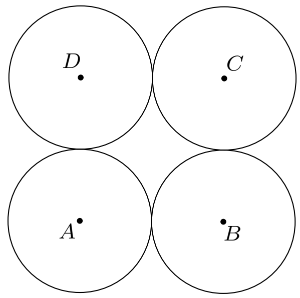
(a) 2

(b) 5

(c) 6

(d) 11

7. En la figura adjunta se muestran cuatro círculos tangentes de igual radio y de centros A, B, C y D, respectivamente (el único punto que comparten las circunferencias de centros D y C, por ejemplo, es el punto medio de $\overline{DC}$). Si la medida del radio de cada círculo es 6 cm, entonces el área en cm^2 del $\square ABCD$ es



(a) 24

(b) 36

(c) 48

(d) 144

8. Una pulga quiere subir una escalera. Ella puede hacer solo dos tipos de brincos: tres escalones hacia arriba o cuatro escalones hacia abajo. Empezando a nivel del piso, la cantidad mínima de brincos que tendrá que dar la pulga para descansar en el escalón 22 es

(a) 9

(b) 10

(c) 12

(d) 15

9. Considere un cuadrado $\square ABCD$ y un triángulo equilátero $\triangle BEC$. Este triángulo se divide en cuatro triángulos equiláteros y uno de estos se divide de nuevo en cuatro triángulos equiláteros más. Si el área de uno de los triángulos equiláteros resultantes de la última división es $x^2\sqrt{3}$, entonces el perímetro del polígono de vértices A, B, E, C y D es

(a) $8x$

(b) $20x$

(c) $24x$

(d) $40x$

10. Carlos tiene cuadrados verdes de tamaño 1×1, cuadrados amarillos de tamaño 2×2 y cuadrados rojos de tamaño 3×3. Él quiere crear un cuadrado usando estos cuadrados, en el cual aparezcan los tres colores. La mínima cantidad de cuadrados que debe utilizar es

    (a) 5

    (b) 6

    (c) 7

    (d) 8

11. Una *suma circular* de dos números se define como sumar ambos números y restarle o sumarle seis las veces necesarias para que el resultado esté entre 1 y 6, inclusive.
    Por ejemplo, la *suma circular* de 8 y 9 es $17-6-6=5$, y la *suma circular* de 4 y -7 es $-3+6=3$.
    Carlos y Karla juegan a lo siguiente: Karla elige un número y luego Carlos lanza un dado, si el resultado del dado es mayor o igual que la suma circular de este y el número de Karla, entonces Carlos gana (en caso contrario gana Karla).
    Si Karla puede elegir solo algún valor del conjunto $\{-2, -1, 2, 3\}$, entonces el número que debe elegir Karla para tener más posibilidad de ganar es

    (a) -2

    (b) -1

    (c) 2

    (d) 3

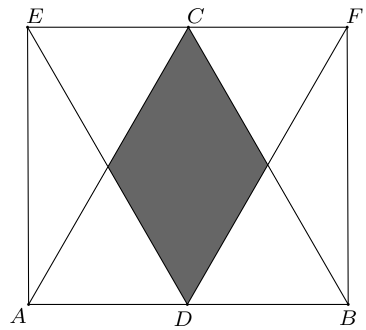
12. En la figura adjunta los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son equiláteros, $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$, C es el punto medio de $\overline{EF}$ y D es el punto medio de $\overline{AB}$. La razón entre el área de la región sombreada y el área del $\square AEFB$ es

(a) $\dfrac{1}{5}$

(b) $\dfrac{1}{4}$

(c) $\dfrac{1}{3}$

(d) $\dfrac{2}{5}$



II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. En cierto país se cumple lo siguiente:

   - Cada par de ciudades del país están enlazadas por exactamente un medio de transporte.
   - Los únicos medios de transporte en el país son bus, tren y avión.
   - Los tres medios de transporte son usados en el país.
   - Ninguna ciudad del país tiene los tres servicios de transporte.
   - No hay tres ciudades que estén enlazadas (dos a dos) por el mismo medio.

   Determine el máximo número de ciudades de dicho país.

2. En un tablero de 8×4 casillas se han colocado nueve fichas de la siguiente manera: tres fichas en la primera fila de color verde cada una, tres fichas en la segunda fila de color amarillo cada una, y tres fichas en la tercera fila de color rojo cada una, tal y como se muestra en la figura adjunta.

   Cada ficha se puede mover únicamente si salta sobre otra ficha y si la casilla en la que cae está desocupada; puede saltar horizontalmente, verticalmente o en diagonal. Por ejemplo, es válido mover la ficha de la casilla $2B$ (amarilla) a cualquiera de las casillas $2D$, $4D$ o $4B$, o bien mover la ficha de la casilla $3B$ (roja) a cualquiera de las casillas $1D$ o $3D$.

   a) Determine la cantidad mínima de movimientos para mover todas la fichas verdes a la fila tres, todas las amarillas a la fila cuatro y todas la rojas la fila cinco pero que queden en las columnas A, B y C como están originalmente.

   b) ¿Cuántos movimientos se necesitan para mover todas la fichas a las últimas tres filas, sin importar el color, ni la columna?

	A	B	C	D
1	v	v	v	
2	a	a	a	
3	r	r	r	
4				
5				
6				
7				
8				

3. Un juego consiste en colocar fichas de dos colores diferentes en los círculos de la figura adjunta.

   Dos jugadores tienen, cada uno, cuatro fichas del mismo color (el jugador A tiene cuatro fichas rojas y el jugador B tiene cuatro fichas azules).
   Los jugadores colocan sus fichas alternadamente y gana el primero que logre colocar tres de sus fichas formando una línea recta.
   Determine si alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora y, en caso de existir, explique cuál es esa estrategia.