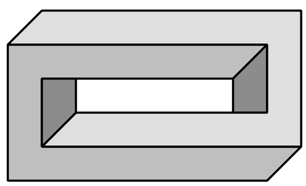
XXXIII Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UCR–ITCR–UNA–UNED–MICITT

Solución
II Eliminatoria



Nivel I
(7°)

2021

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas.

La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con dos preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas de selección única que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en el sistema de EstudiaU.
- Las respuestas a las preguntas de desarrollo se envían para calificación utilizando la misma herramienta de cuestionario en la plataforma, debe adjuntar imágenes claras y legibles, además de incluir todo el procedimiento requerido.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas. Una hora extra para digitalizar y subir las soluciones al desarrollo.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Considere un triángulo ABC. Sea E un punto sobre $\overline{BC}$ a partir del cual se traza una perpendicular sobre el lado $\overline{AC}$ y sea D el punto de intersección entre ambos segmentos. Por el punto E se traza una recta paralela a $\overline{AC}$. Sea F el punto de intersección entre dicha recta y $\overline{AB}$. Si $\triangle ABE$ es equilátero y $\triangle EDC$ es isósceles, entonces la $m\angle AFE$ corresponde a

   (a) $105°$
   (b) $75°$
   (c) $45°$
   (d) $135°$

- Opción correcta: (a)
- Solución: Se tiene que $m\angle ABC + m\angle BCA + m\angle BAC = 180°$ y como $m\angle ABC = 60°$ y $m\angle BCA = 45°$, entonces $m\angle BAC = 75°$, por lo que $m\angle DAE = 15°$ y como $\overline{FE} \parallel \overline{AC}$, entonces $m\angle AEF = 15°$.

  Luego, como $\angle AFE + \angle AEF + \angle FAE = 180°$ y $\angle AEF = 15°$ y $\angle FAE = 60°$, entonces $\angle AFE = 105°$.

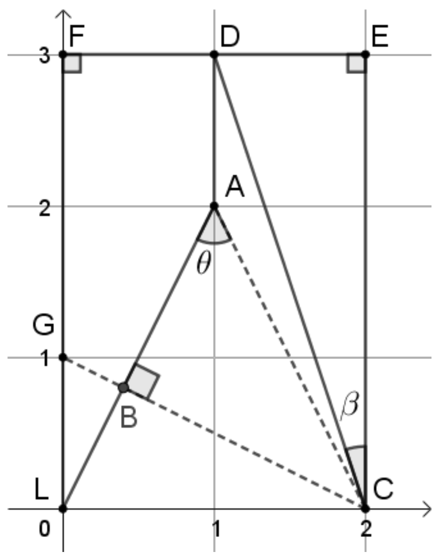
2. Un estudiante le pregunta a su profesor de matemáticas qué edades tienen sus hijos y este le proporciona la siguiente información para que trate de adivinar: "El producto de las edades de mis tres hijos es 36 años y la suma es la edad que tienes". El estudiante le responde que le hace falta un dato para determinar las edades y el profesor le indica 'cierto, a mi hijo mayor le gusta el fútbol'. ¿Cuál es la edad del hijo mayor?

   (a) 9 años
   (b) 12 años
   (c) 11 años
   (d) 6 años

- Opción correcta: (a)
- Solución: De todas las formas en que se puede descomponer el 36, en dos de ellas la suma da lo mismo, 13. Las posibles edades serían entonces 9, 2 y 2 o 6, 6 y 1, pero dado que hay un hijo mayor, entonces las edades son 9, 2 y 2 y por tanto el mayor tiene 9 años.

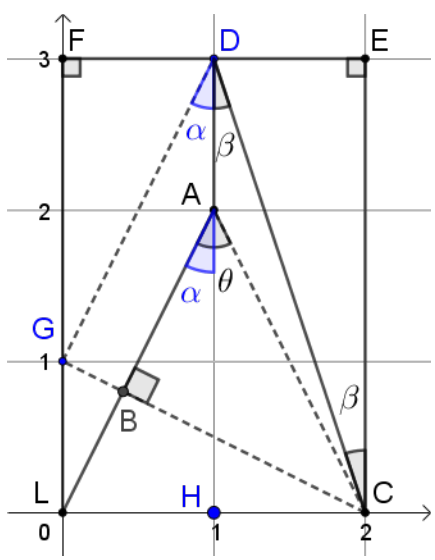
3. Según los datos de la cuadrícula, se puede deducir que el valor de $\theta + 2\beta$ corresponde a

   (a) 60°
   (b) 75°
   (c) 80°
   (d) 90°



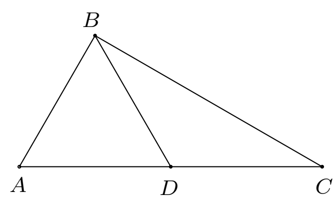
- Opción correcta: (d)

- Solución: Sea H el punto medio de $\overline{CL}$ y sea α la mitad del ángulo θ, de la cuadricula se deduce que el $\square LADG$ es un paralelogramo y por tener segmentos paralelos el $\angle GDH = \angle LAH = \alpha$ y $\angle DGC = 90°$ además el $\angle DCE = \angle HDC = \beta$ por ser ángulos alternos internos. Por lo anterior se tiene que el $\triangle DGC$ es un triángulo rectángulo isósceles de 45°, 45° y 90° lo que significa que $\alpha + \beta = 45°$, luego $2\alpha + 2\beta = 90°$ pero $2\alpha = \theta$ con lo cual $\theta + 2\beta = 90°$



4. En la figura adjunta se tiene que $A - D - C$. si $AB = BD = DC$ y $m\angle BDC = 2m\angle ABD$, entonces $m\angle DBC$ corresponde a

   (a) 60°
   (b) 30°
   (c) 15°
   (d) 45°



- Opción correcta: (b)
- Solución: Como $m\angle BDC = 2m\angle ABD$ entonces por el teorema del ángulo externo tenemos que $\angle ABD \cong \angle BAD$ y además $\angle BDA \cong \angle BAD$ por ser el $\triangle ABD$ isósceles, así $\triangle ABD$ es equilátero, entonces $m\angle BDC = 120$, y como $BD = CD$ entonces $m\angle DBC = 30°$

5. La suma de las cifras del menor número entero natural que al ser dividido por 30, 36 y 45 tiene como residuo 7, corresponde a

   (a) 8
   (b) 9
   (c) 16
   (d) 18

- Opción correcta: (c)
- Solución: Calculamos el mínimo común múltiplo de 30, 36 y 45 y le sumamos 7, de esa manera obtenemos el 187 y la suma de sus cifras es 16.

6. Melba está haciendo una fiesta para su hija, en la cual tendrá 29 invitados. Ella dará de comer pizza pero cada persona debe comer al menos $\frac{1}{5}$ parte de una pizza y como máximo $\frac{2}{3}$ partes de una pizza, entonces ¿cuántas diferentes cantidades de pizza podrá ordenar Melba?

   (a) 6
   (b) 12
   (c) 14
   (d) 20

- Opción correcta: (c)
- Solución: Si todas las personas invitadas comieran lo mínimo entonces se gastaria $\dfrac{29}{5}$ pizzas, por lo que seria necesario ordenar 6 pizzas.

  Si todas las personas invitadas comieran el máximo entonces se gastaria $\dfrac{58}{3}$ pizzas, por lo que seria necesario ordenar 20 pizzas.

  Como la cantidad total no se sabrá hasta el día de la fiesta entonces Melba podrá ordenar 14 diferentes cantidades de pizza

7. En Puntarenas un puesto de Churchill vende durante los días soleados 100 colosos (Churchill más grande) y 60 granizados, en diás nublados el mismo puesto vende 40 colosos y 120 granizados, si durante el mes de abril vendió la misma cantidad de colosos y granizados, ¿cuántos días nublados tuvo el mes de abril?

   (a) 10
   (b) 15
   (c) 18
   (d) 20

- Opción correcta: (a)
- Solución: Sea x el número de días soleados en el mes de abril, entonces hubo $30-x$ días nublados.

  Se vendieron $100x + 40(30 - x)$ colosos y $60x + 120(30 - x)$ granizados, dado que deben ser la misma cantidad, se igualan y se obtiene que hay 20 días soleados y en consecuencia 10 días nublados

8. La cantidad de números de 5 cifras de la forma $ababa$, con a y b dígitos tales que $b < a$ que son divisibles por 18 corresponde a

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Como el número es divisible entre 18 entonces debe er divisible entre 2 y entre 9. Para que sea divisible entre 9 la suma de los dígitos debe ser múltiplo de 9, es decir, $3a + 2b$ debe ser múltiplo de 9. Para que sea divisible entre 2 debe terminar en par, por lo que $a \in \{2, 4, 6, 8\}$. Por lo que se pueden analizar estos casos.

  Si $a = 2$, $b \in \{0, 1\}$, pero ninguno de estos valores hace que $3a + 2b = 6 + 2b$ sea múltiplo de 9.

  Si $a = 4$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Solamente $b = 3$ genera $3a + 2b = 12 + 6 = 18$ múltiplo de 9.

  Si $a = 6$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, pero ninguno de estos valores hace que $3a+2b = 18+2b$ múltiplo de 9.

  Si $a = 8$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Solamente $b = 6$ genera $3a + 2b = 24 + 12 = 36$ múltiplo de 9.

  Por lo tanto, solamente los números 43434 y 86868 cumplen lo pedido.

9. Baudilio tiene dos dados de 6 caras. El primer dado tiene los primeros 6 números impares y el segundo dado tiene los primeros 6 número primos. Si lanza ambos dados juntos y suma los números obtenidos en la cara superior en cada uno, la suma con más probabilidad de salir corresponde a

   (a) 12
   (b) 14
   (c) 16
   (d) todos son igualmente probables

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Organicemos la información en la siguiente tabla:

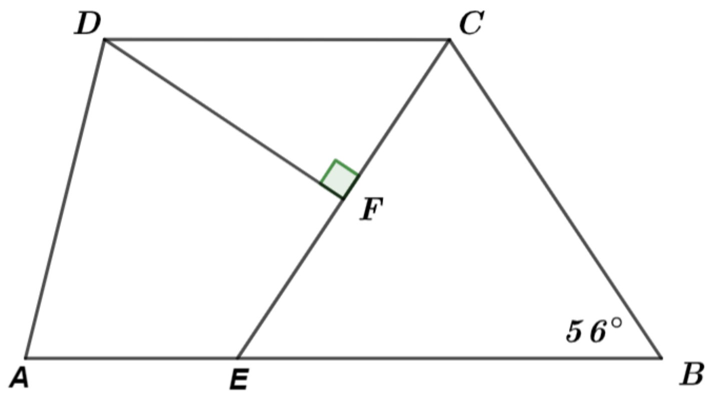
	1	3	5	7	9	11
2	3	5	7	9	11	13
3	4	6	8	10	12	14
5	6	8	10	12	14	16
7	8	10	12	14	16	18
11	12	14	16	18	20	22
13	14	16	18	20	22	24

  Se observa que la suma que más se presenta es 14, por lo que es el resultado con mayor probabilidad.

10. Considere el cuadrilátero $ABCD$ con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Sea E un punto, tal que $A - E - B$, $BC = CE$ y $m\angle ABC = 56°$. Además, sea F un punto en $\overline{CE}$ tal que $\overline{DF} \perp \overline{CE}$, entonces $m\angle CDF$ corresponde a

    (a) $34°$
    (b) $56°$
    (c) $68°$
    (d) $83°$

- Opción correcta: (a)
- Solución: De acuerdo con la información dada, se tiene la siguiente figura:



Como $BC = CE$, el triángulo BCE es un triángulo isósceles con $m\angle EBC = m\angle CEB = 56°$.

Por otro lado, se tiene que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y considerando $\overline{CE}$ como un segmento transversal, por ángulos alternos internos se tiene que $m\angle CEB = m\angle DCF = 56°$.

Además, se tiene que $\overline{DF} \perp \overline{CE}$, se obtiene el triángulo rectángulo CDF recto en el ángulo CFD.

Por el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos se obtiene que

$$m\angle CDF = 180° - (m\angle DCF + m\angle CFD) \Rightarrow m\angle CDF = 180° - (56° + 90°) \Rightarrow m\angle CDF = 34°$$

11. Elvis, Fernando, Ana y María son 4 estudiantes finalistas de un concurso de oratoria. Al ser consultados sobre quién fue el ganador, respondieron:

    - Elvis: Ana ganó el concurso.
    - María: Yo no gané.
    - Fernando: Yo gané.
    - Ana: Elvis ganó el concurso.

    Si se sabe que solamente una persona dijo la verdad entonces, ¿quién fue el ganador o ganadora del concurso?

    (a) Elvis

    (b) María

    (c) Fernando

    (d) Ana

- Opción correcta: *b*

- Solución: Si observamos las afirmaciones de Elvis y Ana, se puede inferir que se contradicen, por lo cual, la persona que dice la verdad es Elvis o Ana. De esta forma tanto Fernado como María mienten, con lo cual se concluye que María fue la ganadora del concurso.

12. Se tiene un edificio de cinco pisos con los cuartos numerados como se muestra en la siguiente figura.

Piso	Cuartos							
4	9	14	19	24	$\cdots$	.	.	.
3	8	13	18	23	$\cdots$	.	.	.
2	7	12	17	22	$\cdots$	.	.	.
1	6	11	16	21	$\cdots$	.	.	.
0	5	10	15	20	$\cdots$	.	.	.

El piso en el cual se encuentra ubicado el cuarto No. 123 corresponde a

(a) 4
(b) 2
(c) 3
(d) 0

- Opción correcta: (c)
- Solución:

No. de Piso	Forma
Piso cero	5k
Primer Piso	5k+1
Segundo Piso	5k+2
Tercer Piso	5k+3
Cuarto Piso	5k+4

Basta resolver $123 \div 5$ para determinar el residuo e identificar el piso.

$123 \div 5 = 5 \cdot 24 + 3$
$\therefore$ El cuarto No. 123 se encuentra en el tercer piso

II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. A cuatro amigos llamados Luis, Carlos, Adrián y José, se les preguntó que mencionaran dos pasatiempos favoritos. Solo uno de ellos mencionó que pescar, dos de ellos indicaron que leer, dos mencionaron que hacer deporte y tres de ellos dijeron que ir al cine. Las profesiones de estos amigos son ingeniero, profesor, matemático y dentista.

   Si se sabe que:

   - El dentista no mencionó como pasatiempo ir al cine.
   - Tanto el profesor como José mencionaron hacer deporte.
   - El ingeniero indicó que leer.
   - Carlos no mencionó ninguno de los pasatiempos que indicaron el matemático y Adrián.

   ¿Quién es el ingeniero?

   Solución:

   Se tiene que tanto al profesor como José les gusta hacer deporte e ir al cine. Además, al ingeniero le gusta leer e ir al cine. De acá se concluye que José no es ni el profesor ni el ingeniero

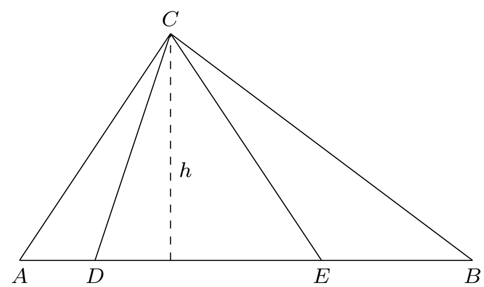
   El dentista es el único que no mencionó ir al cine y dado que Carlos no indica ninguno de los pasatiempos del matemático y Adrián, se concluye que Carlos es el dentista. Y además, se tiene que José es el matemático. Esto también permite concluir que el dentista (Carlos) mencionó la pesca y leer.

   Si el profesor fuera Luis y el ingeniero fuera Adrián, contradice el hecho que Carlos no mencionó ningún pasatiempo de los que indicó Adrián, por lo que se debe tener que el profesor es Adrián y el ingeniero es Luis.

2. Sea el $\triangle ABC$, D, E puntos tales que $A - D - E - B$, h es la altura desde C hasta $\overline{AB}$ tal que $h = 3AD$, el área del $\triangle DCE$ es tres veces el área del $\triangle ADC$ y el área del $\triangle ABC$ es tres veces el área de $\triangle BEC$. Si el área de $\triangle BCD = 30$, determine el área del $\triangle AEC$

- Solución: Recuerde que (ABC) denota el área del triángulo ABC.

  Considere la siguiente figura



Note que $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, $\triangle DCE$, $\triangle BEC$ Y $\triangle BCD$, tienen la misma altura desde B (h), entonces:

$(DCE) = 3(ADC) \Rightarrow DE = 3AD$

$(ABC) = 3(BEC) \Rightarrow AB = 3EB \Rightarrow AD + DE + EB = 3EB \Rightarrow 2AD = EB$

$(BCD) = 30 \Rightarrow h \cdot DB = 60 \Rightarrow 3AD \cdot (DE + EB) = 60 \Rightarrow AD = 2$

y así se tiene que $DE = 6, h = 6$ entonces $(AEC) = \frac{1}{2}DE \cdot h = 18$.