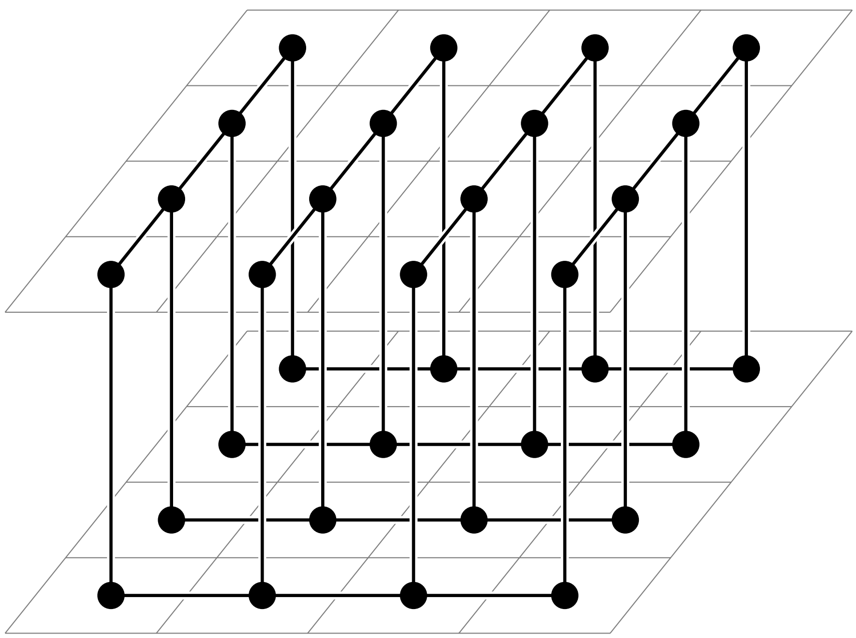
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL



II Nivel

(8° – 9°)

2017

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del lunes 02 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Sofía tiene cierta cantidad de caramelos; se come $30\,\%$ de ellos y le quedan 280 caramelos. Carol tiene la misma cantidad de caramelos que Sofía, pero se come $26\,\%$ de ellos. La cantidad de caramelos que Carol se come es

   (a) 30

   (b) 84

   (c) 104

   (d) 296

2. Sea el $\square ABCD$ un cuadrado en el que $AB = 3$. Sea E un punto tal que $B - C - E$ y sea F el punto de intersección de $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$. Si $BE = 4$, entonces el área del $\square ABCF$ es

   (a) $4\frac{1}{4}$

   (b) $5\frac{3}{8}$

   (c) $5\frac{1}{2}$

   (d) $5\frac{5}{8}$

3. En el número 213 se tiene que 3 divide a 21. La cantidad de números de tres dígitos que cumplen que el dígito de las unidades divide al número formado por los dígitos de las centenas y decenas es

   (a) 112

   (b) 153

   (c) 254

   (d) 360

4. En la ecuación $O \cdot L \cdot (C + O + M + A) = 77$ cada letra corresponde a un dígito diferente $(0, 1, 2, \ldots, 9)$. En este caso, las dos letras O toman valores distintos. La cantidad de maneras diferentes en que se pueden escoger los valores de las letras es

   (a) 96

   (b) 60

   (c) 48

   (d) 24

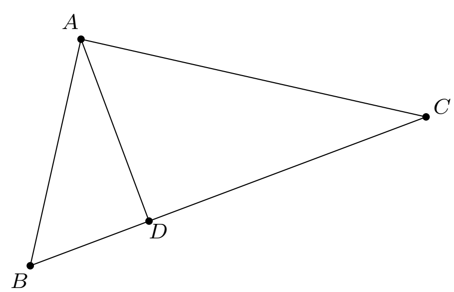
5. En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $m\angle BAC = 90°$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. Si $BC = 5$ y $AC = 4$, entonces el área del $\triangle ADC$ es

   (a) 4

   (b) 5

   (c) $\dfrac{54}{25}$

   (d) $\dfrac{96}{25}$



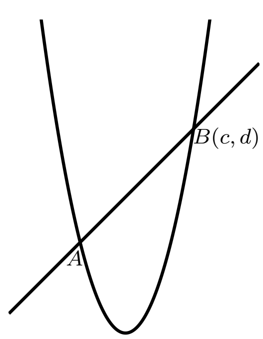
6. En la figura adjunta están representadas las ecuaciones $y = x - 1$ y $y = x^2 + ax + b$. Los puntos A y B son los puntos de intersección entre la recta y la parábola. Si las coordenadas del punto A son $(1, 0)$ y el punto $(0, 5)$ pertenece a la parábola, entonces las coordenadas del punto B son

   (a) $(4, 3)$

   (b) $(5, 4)$

   (c) $(6, 5)$

   (d) $(7, 6)$



7. Una *suma circular* de dos números se define como sumar ambos números y restarle o sumarle seis las veces necesarias para que el resultado esté entre 1 y 6, inclusive.
   Por ejemplo, la *suma circular* de 8 y 9 es $17-6-6=5$, y la *suma circular* de 4 y -7 es $-3+6=3$.
   Carlos y Karla juegan a lo siguiente: Karla elige un número y luego Carlos lanza un dado, si el resultado del dado es mayor o igual que la suma circular de este y el número de Karla, entonces Carlos gana (en caso contrario gana Karla).
   Si Karla puede elegir solo algún valor del conjunto $\{-2,-1,2,3\}$, entonces el número que debe elegir Karla para tener más posibilidad de ganar es

   (a) -2

   (b) -1

   (c) 2

   (d) 3

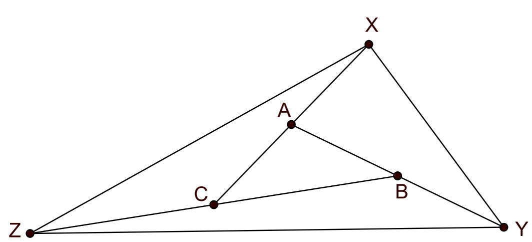
8. Los tres lados del $\triangle ABC$ se prolongan una distancia igual a sus respectivas longitudes, tal y como se observa en la figura adjunta. Si el área del $\square XCBY$ es 18 cm^2, entonces el área en cm^2 del $\triangle XYZ$ es

   (a) 28

   (b) 30

   (c) 36

   (d) 42



9. Considere la ecuación cuadrática $x^2 + \frac{p}{3}x + q - 5 = 0$ en la que p y q son constantes reales. Si $p + q$ es un número primo y la ecuación posee una única solución real, entonces $p + q$ es

   (a) 2

   (b) 3

   (c) 5

   (d) 7

10. Considere los números $p = n\left(n^2 - 1\right)$ con n entero y $1 \leq n \leq 2017$. La cantidad de números p que terminan en 0 es

   (a) 1209

   (b) 1210

   (c) 1211

   (d) 1212

11. Sean a, b y c números reales, con $a \neq c$. Sean

$$P(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$$

$$Q(x) = 3x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 2$$

   Las condiciones que deben cumplir los números a, b y c para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes son

   (a) $a = 3$ y $b = c$

   (b) $b = -5$ y $a = -c$

   (c) $c = -3$ y $a = b$

   (d) $b = 5$ y $c = 2a$

12. La cantidad de números enteros positivos k, múltiplos de siete, que cumplen que el producto de sus dígitos es igual a $\dfrac{19k-2808}{8}$ es

    (a) 0

    (b) 1

    (c) 2

    (d) 3

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Considere el número de 28 dígitos de la forma

$$1\,223\,334\,444\,555\,556\,666\,667\,777\,777$$

   Determine la menor cantidad de dígitos que deben cambiarse para que el número resultante sea divisible por 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

2. Un colegio organiza un campeonato de fútbol sala. Participan seis equipos; en cada ronda juegan todos los equipos, de modo que se juegan tres partidos por jornada. Al final del campeonato, todos han jugado exactamente una vez contra los demás equipos. El equipo ganador de un partido gana tres puntos, el que pierde no obtiene puntos, y si hay empate cada equipo gana un punto.

   a) Si al final de la segunda jornada se sabe que solo un partido terminó en empate, determine si es posible que todos los equipos tengan puntuaciones diferentes.

   b) Al final del campeonato se sabe que hubo exactamente 11 partidos que terminaron en empate. Si todos los equipos tienen diferentes puntuaciones, determine el menor puntaje posible para el equipo que queda en primer lugar del campeonato.

3. Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, tal que $m\angle ABC = 90^\circ$ y $AB = 12$ cm. Sea Q un punto tal que $A-Q-C$ y $AQ = 3CQ$. Si M el punto medio de $\overline{AB}$ y el área del $\square BMQC = 30$ cm^2, determine CQ.