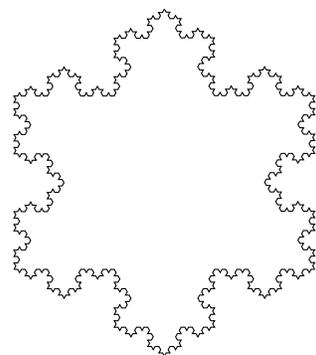


# XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

*MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC*



## SEGUNDA ELIMINATORIA



Nivel II  
(8° – 9°)

2020



Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2020 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Segunda Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.  
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del XXX, en la siguiente dirección electrónica:

[www.olcoma.com](http://www.olcoma.com)

### INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

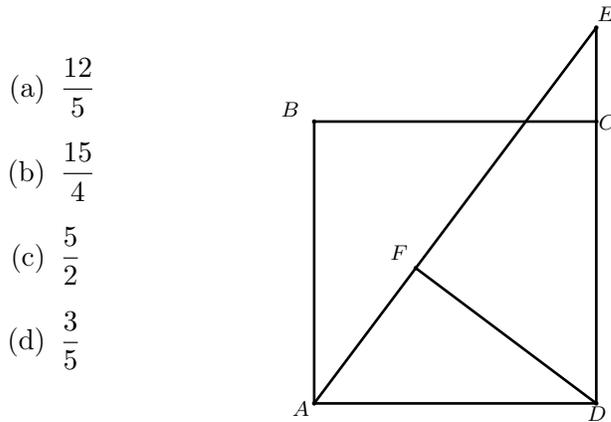
### SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos $A$ y $B$	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
$AB$	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo $A$ y que contiene a $B$	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos $A$ y $B$	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos $A$ y $B$
$\triangle ABC$	triángulo de vértices $A, B, C$	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices $A, B, C, D$	$(ABC)$	área de $\triangle ABC$
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P - Q - R$	$P, Q, R$ puntos colineales, con $Q$ entre los puntos $P$ y $R$

**I Parte: Selección única****Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Suponga que los cuatro números enteros  $a$ ,  $b$ ,  $a + b$  y  $a - b$  son primos. Con certeza, la suma de estos cuatro números es
  - (a) múltiplo de 2
  - (b) múltiplo de 3
  - (c) múltiplo de 5
  - (d) un número primo
  
2. Benancio está incursionando en la crianza de vacas lecheras, para ello, compra vacas de la finca de Pancraccio y vacas de la finca de Casimiro. Si sabe que en cinco días, cuatro vacas de Pancraccio y tres vacas de Casimiro dan la misma cantidad de leche que tres vacas de Pancraccio y cinco vacas de Casimiro en cuatro días, entonces se puede afirmar que
  - (a) Las vacas de Pancraccio y las vacas de Casimiro dan la misma cantidad de leche por día
  - (b) Las vacas de Pancraccio dan más leche por día que las vacas de Casimiro
  - (c) Las vacas de Pancraccio dan el doble de leche por día que las vacas de Casimiro
  - (d) Las vacas de Casimiro dan más leche por día que las vacas de Pancraccio
  
3. La cantidad de divisores del número  $2020^{2020}$  corresponde a
  - (a)  $2021^2$
  - (b)  $4041 \cdot 2020^2$
  - (c)  $4041 \cdot 2021^2$
  - (d)  $4041^2 \cdot 2021$

4. En la siguiente figura,  $\square ABCD$  es un cuadrado de lado con medida igual a 3 cm. Si  $A - F - E$ ,  $D - C - E$ ,  $\overline{DF} \perp \overline{AE}$  y  $CE = 1$  cm, la medida, en centímetros, de  $\overline{DF}$  es



- (a)  $\frac{12}{5}$
- (b)  $\frac{15}{4}$
- (c)  $\frac{5}{2}$
- (d)  $\frac{3}{5}$

5. Se reúnen 15 personajes de la Tierra Media, que provienen de las aldeas de Hobbits, Elfos, Humanos y Enanos. Si se sabe que cada aldea manda un número diferente de representantes (al menos uno), entre Elfos y Hobbits hay 6 representantes, entre Elfos y Enanos hay 7 representantes, y en la reunión hay más Enanos que Humanos, la aldea que envió exactamente 6 representantes es la de los

- (a) Elfos
- (b) Enanos
- (c) Humanos
- (d) Hobbits

6. Un mensajero debe repartir tres paquetes a tres lugares diferentes. Si lo hace al azar, es decir, elige el paquete y la dirección aleatoriamente, entonces la probabilidad de que al menos uno de los paquetes llegue a su destino correcto es

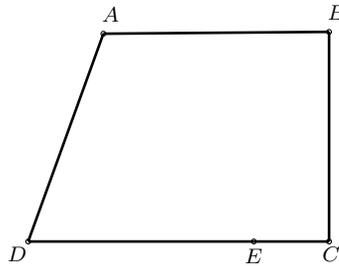
- (a) 0
- (b)  $\frac{1}{3}$
- (c)  $\frac{2}{3}$
- (d) 1

7. Sean  $a$  y  $b$  dígitos. Si el número  $7a93141b$  es divisible por 72, entonces el dígito  $a$  es

- (a) 1
- (b) 3
- (c) 5
- (d) 8

8. La figura adjunta  $\square ABCD$  es un trapecio con  $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ . Si  $E$  es un punto en  $\overline{DC}$ , tal que  $\overline{EB} \parallel \overline{AD}$ ,  $\overline{AC}$  interseca a  $\overline{BE}$  en  $P$  y  $AP = 3PC$ , entonces la razón  $\frac{(EAC)}{(ABCD)}$  corresponde a

- (a)  $\frac{1}{4}$
- (b)  $\frac{1}{6}$
- (c)  $\frac{1}{7}$
- (d)  $\frac{1}{8}$



9. Diana y Maricela están escribiendo y jugando por un chat. Diana le escribe  $\heartsuit \heartsuit \diamondsuit \heartsuit \heartsuit \diamondsuit \heartsuit$ . Maricela copia el mensaje dos veces y se lo envía, es decir  $\heartsuit \heartsuit \diamondsuit \heartsuit \heartsuit \diamondsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \diamondsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \diamondsuit \heartsuit$ . Diana copia, dos veces, el mensaje recibido y se lo envía a Maricela, y así siguen hasta que cada una envía 20 mensajes. La cantidad de corazones que envía Diana en su último mensaje es

- (a)  $2^{40} \cdot 5$
- (b)  $2^{19} \cdot 10$
- (c)  $2^{38} \cdot 5$
- (d)  $2^{38} \cdot 10$

10. Los perímetros de dos cuadrados  $C_1$  y  $C_2$  suman 20 cm. Se forman dos nuevos cuadrados  $C_3$  y  $C_4$ , de modo que la medida del lado del cuadrado  $C_3$  es una unidad menor que la medida del lado del cuadrado  $C_1$ , y la medida del lado del cuadrado  $C_4$  es el doble de la medida del lado del cuadrado  $C_2$ . Si la suma de los perímetros de los cuadrados  $C_3$  y  $C_4$  es 30 cm, entonces la suma de las áreas de los cuadrados  $C_1$  y  $C_3$ , en  $\text{cm}^2$ , es

- (a)  $\frac{5}{2}$
- (b)  $\frac{29}{2}$
- (c)  $\frac{25}{2}$
- (d)  $\frac{197}{4}$

11. Sea  $a$  un dígito. El número  $n$  es el resultado de multiplicar el número  $2a7$  por 39. Si el dígito de las decenas del número  $n$  es igual a 9, entonces la suma de los dígitos de  $n$  corresponde a

- (a) 5
- (b) 10
- (c) 15
- (d) 20

12. Sean  $x$  y  $y$ , con  $x > y$ , dos números positivos. Si  $x^2 + y^2 = 12$  y  $xy = 4$  entonces el valor numérico de  $x^2 - y^2$  corresponde a

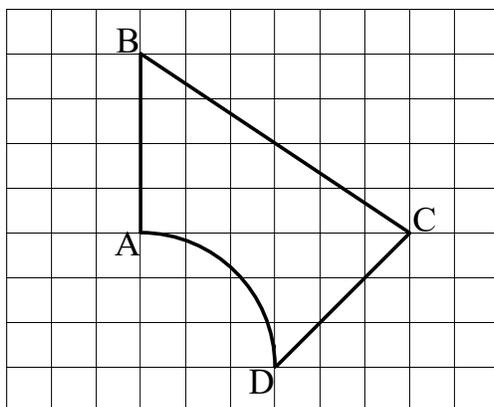
- (a)  $2\sqrt{5}$
- (b)  $4\sqrt{5}$
- (c)  $6 + 2\sqrt{5}$
- (d)  $48\sqrt{5}$

## II Parte: Desarrollo

Valor 14 puntos, 7 pts c/u

**Instrucciones:** Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en hojas adicionales. **Debe responder cada pregunta en hojas separadas.** Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

- En la imagen adjunta se sabe que el área del triángulo rectángulo  $\triangle ABC$  es  $\frac{\pi^2}{3}$ . Si la figura de vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  está creada por tres segmentos y una cuarta parte de una circunferencia, tal y como se muestra en la imagen, determine el valor exacto (sin decimales) del perímetro de la región delimitada por los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .



- Diana y Adrián juegan el siguiente juego por turnos, comenzando con una torre de  $n$  monedas, donde  $n \geq 3$ . En cada turno, un jugador selecciona una torre de monedas, y la divide en dos torres de monedas. Gana el primero que logre en su turno que todas las torres tenga como máximo dos monedas. Diana empieza. Dependiendo de  $n$ , determine cuál jugador tiene una estrategia ganadora.