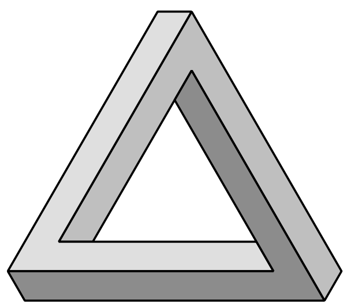
XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UCR–ITCR–UNA–UNED–MICITT

Solución

II Eliminatoria



Nivel II

$(8^\circ - 9^\circ)$

2021

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con dos preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas de selección única que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en el sistema de EstudiaU.
- Las respuestas a las preguntas de desarrollo se envían para calificación utilizando la misma herramienta de cuestionario en la plataforma, debe adjuntar imágenes claras y legibles, además de incluir todo el procedimiento requerido.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas. Una hora extra para digitalizar y subir las soluciones al desarrollo.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Sean p, q y r números reales. Si la única solución de la ecuación $x^2 + 2qx + r = 0$ es $x = p$ y se cumple que $p^2 + q^2 = r^2$, entonces ¿cuántas ecuaciones cuadráticas satisfacen la condición del enunciado?

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4

- Opción correcta: (c)
- Solución: Dado que $x = p$ es la única solución de la ecuación, entonces puede escribirse como $(x - p)^2 = 0$, de donde se obtiene que $-2p = 2q \Longrightarrow q = -p$ y $p^2 = r$. Ahora, de acuerdo con el discriminante, se tiene que $4q^2 - 4r = 0 \Longrightarrow q^2 = r$.

  Luego, $p^2 + q^2 = 2r$ y como por hipótesis se tiene que $p^2 + q^2 = r^2$, entonces $r^2 = 2r$, de donde se concluye que $r = 0 \vee r = 2$.

  Para $r = 0$, se obtiene la ecuación $x^2 = 0$ y para $r = 2$ se obtienen las ecuaciones $x^2 - \sqrt{2}x + 2 = 0$ y $x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0$. Por tanto hay 3 ecuaciones que cumplen con la condición del enunciado.

2. ¿Cuántas parejas de enteros positivos (a, b), con $a \leq b$, existen de modo que $2b+1$ sea múltiplo de a y $2a+1$ sea múltiplo de b?

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4

- Opción correcta: (c)
- Solución: De acuerdo con la información dada y la definición de múltiplo se tiene que:

$$2b+1 = a \cdot k \ \text{ y } \ 2a+1 = b \cdot p \ \text{ con } k, p \text{ enteros}$$

Observe que a, b, k, p son impares y positivos. Además, como $a \leq b$ y por las igualdades anteriores se obtiene que:

$$2a+1 \leq 2b+1 \Rightarrow bp \leq 2b+1 \Rightarrow b(p-2) \leq 1$$

Para que la desigualdad anterior se cumpla, se tiene los siguientes casos:

- Si $p = 1$ entonces $2a+1 = b \Rightarrow 4a+2 = 2b$. Luego se sustituye en la igualdad $2b+1 = ak$. Es decir,

$$4a+1+1 = ak \Rightarrow 3 = ak - 4a \Rightarrow 3 = a(k-4)$$

  Como a, b, k, p son impares y positivos, de la igualdad $3 = a(k-4)$ se obtiene que $a = 1$ o $a = 3$
  - Si $a = 1 \Rightarrow$ se deduce que $k = 7$ y $b = 3$. Por lo tanto, se tiene la pareja $(1, 3)$.
  - Si $a = 3 \Rightarrow$ se deduce que $k = 5$ y $b = 7$. Por lo tanto, se tiene la pareja $(3, 7)$.
- Si $p = 3$ y de la desigualdad $b(p-2) \leq 1$ se obtiene que $b \leq 1$. Entonces $a = 1$ y $b = 1$. Recordar que $a \leq b$. Por lo tanto, se tiene la pareja $(1, 1)$.

Solución Alternativa

Como $2b+1$ es múltiplo de a y $2a+1$ es múltiplo de b, entonces ab divide a $(2a+1)(2b+1)$, por lo que $4ab+2a+2b+1 = (ab)n$, con $n \in \mathbb{Z}$ y se concluye que ab divide a $2a+2b+1$, por lo que $ab \leq 2a+2b+1$ y como $a \leq b$, entonces $ab \leq 4b+1$. Luego, $a \leq 4 + \dfrac{1}{b} \leq 5$.

Los posibles valores de a son $1, 2, 3, 4, 5$ y al verificar, las parejas que cumplen las condiciones son $(1, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, 7)$.

3. Sean a y b números reales diferentes de cero tales que $9a^2 + 4b^2 = 37ab$ un número igual a la expresión $\dfrac{2a+b}{a-2b}$ corresponde a

   (a) $\dfrac{11}{17}$

   (b) $\dfrac{9}{2}$

   (c) $\dfrac{-7}{19}$

   (d) $\dfrac{-7}{6}$

- Opción correcta: (b)

- Solución:

  Como $9a^2 + 4b^2 = 37ab$ entonces factorizando la expresión $9a^2 - 37ab + 4b^2$ se tiene que $(9a - b)(a - 4b) = 0$ con lo cual $b = 9a$ o $a = 4b$.

  Si $b = 9a$ entonces la expresión $\dfrac{2a+b}{a-2b} = \dfrac{2a+9a}{a-2(9a)} = \dfrac{11a}{-17a} = \dfrac{-11}{17}$

  Si $a = 4b$ entonces la expresión $\dfrac{2a+b}{a-2b} = \dfrac{2(4b)+b}{4b-2b} = \dfrac{9b}{2b} = \dfrac{9}{2}$

4. El mayor número primo que divide a 999 999, corresponde a

   a) 13
   b) 37
   c) 259
   d) 3367

- Opción correcta: (b)
- Solución: Observe que $999\,999 = 1\,000\,000 - 1 = 100^3 - 1 = (100-1)(100^2+100+1) = 99 \cdot 10\,101 = 3^2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

5. El número m es un entero positivo que posee exactamente veinticuatro divisores naturales. De estos veinticuatro divisores solamente tres son primos, además 30 divide a m. ¿Cuántos valores distintos puede tomar m?

   (a) 3
   (b) 5
   (c) 6
   (d) 9

- Opción correcta: (d)
- Solución: Como 30 divide a m, entonces los tres divisores primos son 2, 3 y 5. Así m es múltiplo de potencias de 2, 3 y 5
  Según el teorema para calcular la cantidad de divisores positivos de un número natural, 24 es el resultado de multiplicar los sucesores de los exponentes de m en su forma canónica.
  Tomando a 24 como el producto de tres naturales se tiene
  $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$ o bien $24 = 2 \cdot 2 \cdot 6$.
  Note que 1 no es un factor que se toma en cuenta, pues en ese caso el exponente sería 0, pero sabemos hay exactamente tres divisores primos.
  Si consideramos $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$ implica que los exponentes sería 1, 2, y 3. Así se tienen seis opciones para m.
  $m = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^3$
  $m = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^2$
  $m = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^3$
  $m = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$
  $m = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$
  $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$
  Si consideramos $24 = 2 \cdot 2 \cdot 6$ implica que los exponentes sería 1, 1, y 5. Así se tienen tres opciones para m.
  $m = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^5$
  $m = 2^1 \cdot 3^5 \cdot 5^1$
  $m = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^1$
  En total se tienen 9 posibles valores para m.

6. David, Daniela y Abril están jugando. El juego consiste en que David debe ir alternadamente donde se encuentran sus compañeras por 5 ocasiones en total. Cada vez que David llega donde Daniela ella le da 5 dólares, y cada vez que llega donde Abril ella le da 5 veces la cantidad de dinero que David llevaba. David empieza a jugar con n colones (n un número natural) y término con 1 290 dólares.
   ¿Cuánto dinero tenía David al iniciar el juego?

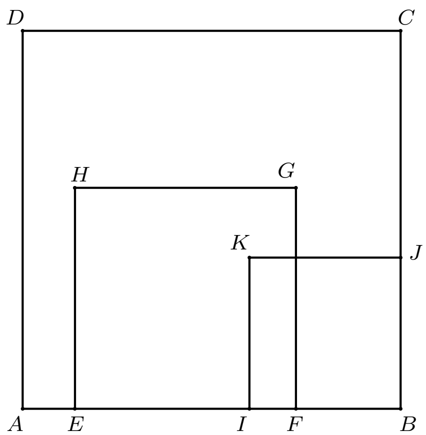
   (a) \$3
   (b) \$5
   (c) \$7
   (d) \$10

- Opción correcta: (b)
- Solución: Supongamos que David recibió dinero por quinta ocación de Daniela, como Daniela le dio \$5 dólares en la quinta ocasión, entonces David traía \$1285.
  Si David traía \$1285 quiere decir que en la cuarta ocasión Abril le dio 5 veces lo que traía, es decir, David traía la sexta parte de \$1285, pero la sexta parte de este monto no es un entero, y como David inició con una cantidad entera de dinero no es posible que David recibiera dinero por última vez de Daniela

  David recibió dinero por quinta ocasión por Abril, ella le dio 5 veces lo que el traía, quiere decir que David llegó donde Abril con $1290 \div 6$, es decir con \$215 dólares.
  Si David llegó donde Abril con \$215 quiere decir que Daniela le dio \$5 dórales en la cuarta ocasión y David traía \$210.
  Si David traía \$210 quiere decir que en la tercera ocasión Abril le dio 5 veces lo que traía, esto es que David traía $210 \div 6$, es decir llegó con \$35.
  Si David traía \$35 quiere decir que en la segunda ocasión Daniela le dio \$5 dórales y David traía \$30.
  Si David traía \$30 quiere decir que en la primera ocasión Abril le dio 5 veces lo que traía, esto es $30 \div 6$, es decir David inició con \$5 .

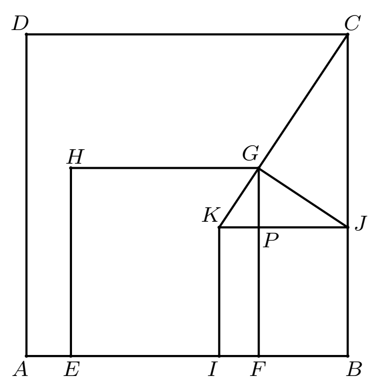
7. En la siguiente figura $\square ABCD$, $\square EFGH$ y $\square IBJK$ son cuadrados. Si los puntos K, G y C son colineales, la medida del lado del cuadrado mayor es 5, la medida del lado del cuadrado menor es 2 y $\overleftrightarrow{KC} \perp \overleftrightarrow{JG}$, entonces el lado del $\square EFGH$ mide

   (a) $\dfrac{38}{13}$
   (b) $\dfrac{36}{13}$
   (c) $\dfrac{5}{2}$
   (d) 3



- Solución:

  Tracemos los segmentos $\overline{KC}$ y $\overline{JG}$ y llamemos P al punto de intersección entre $\overline{KJ}$ y $\overline{FG}$. En $\triangle KJC$ se tiene $KJ = 2$ y $JC = 3$, entonces por Teorema de Pitágoras, $KC = \sqrt{13}$.



Por otra parte, $\triangle KCJ \sim \triangle KJG$ (por A-A), por lo que $\dfrac{KJ}{KG} = \dfrac{KC}{KJ}$ de donde $\dfrac{2}{KG} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ y $KG = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$.

Además $\triangle KCJ \sim \triangle KGP$ (por A-A), por lo que $\dfrac{KC}{KG} = \dfrac{CJ}{GP}$, de donde $\dfrac{\sqrt{13}}{\frac{4}{\sqrt{13}}} = \dfrac{3}{GP}$ y $GP = \dfrac{12}{13}$.

Entonces $GF = FP + GP = 2 + \dfrac{12}{13} = \dfrac{38}{13}$

8. Considere la siguiente ecuación:

$$2x^2 + 4x + 5 = -4x + 8$$

Según la información anterior, la suma de las raíces de la ecuación dada corresponde a

a) -2
b) -4
c) 2
d) 4

- Opción correcta: (b)
- Solución: Se tiene la siguiente igualdad $2x^2+4x+5 = -4x+8$ que es equivalente a $2x^2+8x-3 = 0$.

  Para determinar la suma de las raíces de la ecuación, se procede a calcular las raíces de dicha ecuación.

  Primero se calcula $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 88$. Como el discriminates es positivo, la ecuación tiene dos raíces reales distintas.

  Luego se calcula las raices, es decir;
  $x_1 = \dfrac{-8+\sqrt{88}}{4}$ y $x_2 = \dfrac{-8+\sqrt{88}}{4}$
  Por lo anterior, la suma de las raíces de la ecuación es:
  $x_1 + x_2 = \dfrac{-8+\sqrt{88}}{4} + \dfrac{-8+\sqrt{88}}{4} = \dfrac{-8+\sqrt{88}-8-\sqrt{88}}{4} = \dfrac{-16}{4} = -4.$

9. Si se colocan todos los números de 4 digitos en una tómbola, ¿cuál es la probabilidad de sacar un número tal que sus cuatros digitos sean números primos y diferentes?

   (a) $\frac{2}{5}$

   (b) $\frac{1}{375}$

   (c) $\frac{5}{72}$

   (d) $\frac{1}{75}$

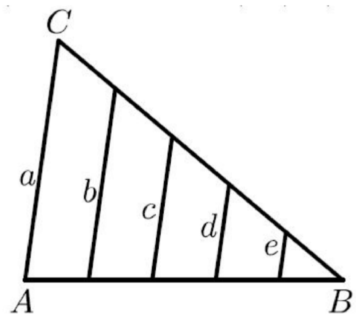
- Opción correcta: b
- Solución:

  Las posibilidades para el primer dígito será 4 números, a mencionar, 2,3, 5 y 7.
  Las posibilidades para el segundo dígito se reduce en 1 pues deben ser diferentes, por lo cual hay 3 posibilidades. Analogamente para el tercer dígito y cuarto dígito.

  Así habrá un total de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números que cumplan con lo solicitado de 9000 números de 4 dígitos.

  Si A es la probabilidad de sacar un número tal que sus cuatros digitos sean números primos y diferente entonces $P(A) = \dfrac{24}{9000} = \dfrac{1}{375}$.

10. En la siguiente figura los segmentos a, b, c, d y e son paralelos y dividen al lado AB en 5 segmentos iguales, como se muestra en la figura.



Si $a = 20$, la suma $a + b + c + d + e$ corresponde a

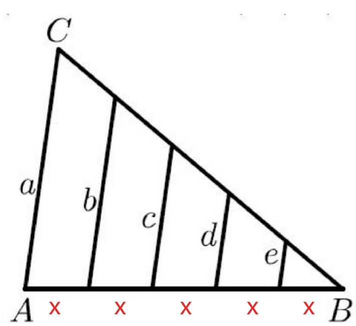
(a) 40

(b) 50

(c) 60

(d) 80

- Opción correcta: (c)
- Solución: Utilizando semejanza de triángulos, tenemos que:

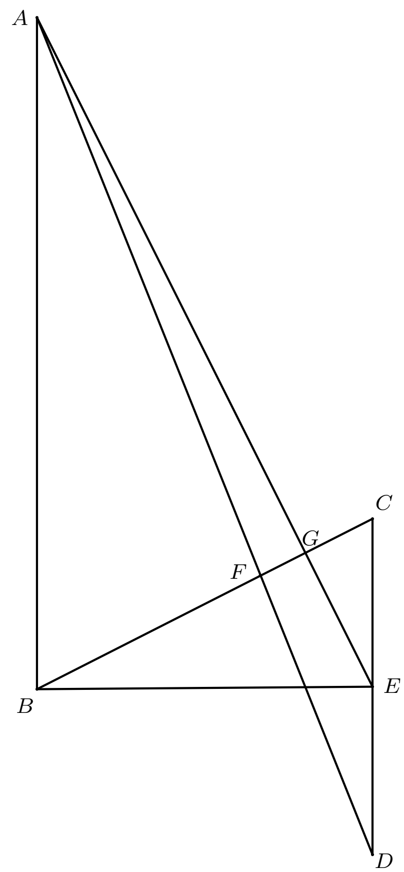


$\dfrac{e}{x} = \dfrac{a}{5x} \Rightarrow e = \dfrac{20x}{5x} \Rightarrow e = 4$

$\dfrac{d}{2x} = \dfrac{a}{5x} \Rightarrow d = \dfrac{40x}{5x} \Rightarrow d = 8$

De forma análoga se determinan los valores de c y b. $\therefore a+b+c+d+e = 20+16+12+8+4 = 60$

11. En la siguiente figura, $\overline{AB} \| \overline{CD}$, E es el punto medio de $\overline{CD}$, $\overline{BE} \perp \overline{CD}$, $\overline{AE} \perp \overline{BC}$. Si $AB = 12$, $CD = 6$, $BE = 6$ y $GE = \sqrt{7}$ entonces la medida de FG es



(a) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$

(b) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

(c) $\sqrt{2}$

(d) $\sqrt{5}$

- Solución:

Aplicando Pitágoras en $\triangle BEC$ se obtiene $BC = 3\sqrt{5}$.
Por otro lado, $\triangle ABF \sim \triangle DCF$, por lo que

$$\frac{12}{6} = \frac{AB}{DC} = \frac{BF}{FC} \Longrightarrow BF = 2FC$$

Como $BF + FC = BC = 3\sqrt{5}$ se tiene $2FC + FC = 3\sqrt{5}$, es decir, $3FC = 3\sqrt{5}$, por lo que $FC = \sqrt{5}$.
Aplicando Pitágoras en $\triangle GCE$ se obtiene $GC = \sqrt{2}$, por lo que $FG = FC - GC = \sqrt{5} - \sqrt{2}$

12. Considere las ecuaciones de segundo grado

$$E1 : 2021x^2 + bx + c = 0$$

$$E2 : cx^2 + bx + 2021 = 0$$

Si sabemos que $x = \pi$, es solución de la ecuación $E1$ determine una solución de la ecuación $E2$.

(a) $\dfrac{1}{\pi}$

(b) $\dfrac{1}{2\pi}$

(c) π

(d) 2π

Opción correcta: (a)

- Solución: Como π es solución de $E1$ se tiene que $2021\pi^2 + b\pi + c = 0$, además se puede dividir la ecuación por π^2 se tiene que: $2021 + \dfrac{b}{\pi} + \dfrac{c}{\pi^2} = 0$ que se puede escribir como: $c\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^2 + b\left(\dfrac{1}{\pi}\right) + 2021 = 0$ lo que significa que $\dfrac{1}{\pi}$ es solución $E2$

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Sean x y y dos números reales tales que $x^2(y+10) = x^4+9+y$. Determine los valores de x para los cuales se tiene que y es un entero negativo.

- Solución: Como $x^2(y+10) = x^4+9+y$ se puede despejar y como función de x:

$$\begin{aligned} x^2y + 10x^2 &= x^4 + 9 + y \\ x^2y - y &= x^4 + 9 - 10x^2 \\ y(x^2-1) &= x^4 - 10x^2 + 9 \end{aligned}$$

Se puede factorizar por inspección como

$$y(x^2-1) = (x^2-1)(x^2-9)$$

$$y(x+1)(x-1) = (x-1)(x+1)(x+3)(x-3)$$

Si x es diferente de 1 y -1 se puede simplificar

$$y = (x-3)(x+3) = x^2 - 9$$

Esto significa que y puede tomar valores enteros desde -9 a -1. Entonces si:

$y = x^2 - 9 = -9$ entonces $x^2 = 0$ entonces $x = 0$.
$y = x^2 - 9 = -8$ entonces $x^2 = 1$ entonces $x = 1$, $x = -1$. No ya que son restricciones
$y = x^2 - 9 = -7$ entonces $x^2 = 2$ entonces $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$.
$y = x^2 - 9 = -6$ entonces $x^2 = 3$ entonces $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$.
$y = x^2 - 9 = -5$ entonces $x^2 = 4$ entonces $x = 2$, $x = -2$.
$y = x^2 - 9 = -4$ entonces $x^2 = 5$ entonces $x = \sqrt{5}$, $x = -\sqrt{5}$.
$y = x^2 - 9 = -3$ entonces $x^2 = 6$ entonces $x = \sqrt{6}$, $x = -\sqrt{6}$.
$y = x^2 - 9 = -2$ entonces $x^2 = 7$ entonces $x = \sqrt{7}$, $x = -\sqrt{7}$.
$y = x^2 - 9 = -1$ entonces $x^2 = 8$ entonces $x = \sqrt{8}$, $x = -\sqrt{8}$.

2. Uno de los diferentes sistemas solares del Universo tiene la particularidad que 4 de sus planetas llamados Jakku, Sorgan, Umbara y Nevarro poseen anillos planetarios. No se cuenta con la información completa pero se sabe que:

   - Ningún planeta tiene más de 14 anillos.
   - Sorgan duplica en cantidad de anillos a Nevarro.
   - Entre los 4 planetas suman 32 anillos.
   - Umbara es el que más anillos tiene.
   - Entre Nevarro y Umbara suman 18 anillos.

   De acuerdo con información dada, ¿es posible determinar la cantidad de anillos que posee cada planeta?

- Solución: Considere que la cantidad de anillos planetarios de de Jakku es x, Sorgan es y, Umbara es z y Nevarro es w.

  Se tiene que:

  - $1 \leq x, y, z, w \leq 14$ pues todos poseen anillos y ninguno tiene más de 14 anillos.
  - $y = 2w$
  - $x + y + z + w = 32$ (*)
  - $w + z = 18$

  Sustituyendo en (*) tenemos:

$$x + y + z + w = 32$$

$$x + 2w + 18 = 32$$

$$x + 2w = 14$$

  Se puede deducir que x debe ser par menor a 14.
  Si $x = 2$ entonces $w = 6$, $y = 12$ y $z = 12$. Imposible, Umbara es el que más anillos tiene.
  Si $x = 4$ entonces $w = 5$, $y = 10$ y $z = 13$. Es posible
  Si $x = 6$ entonces $w = 4$, $y = 8$ y $z = 14$. Es posible
  Si $x = 8$ entonces $w = 3$, $y = 6$ y $z = 15$. Imposible,ninguno posee más de 14 anillos.
  Si $x = 10$ entonces $w = 2$, $y = 4$ y $z = 16$. Imposible, Imposible,ninguno posee más de 14 anillos.
  Si $x = 12$ entonces $w = 1$, $y = 2$ y $z = 17$. Imposible, Imposible,ninguno posee más de 14 anillos.

  De acuerdo con la información podemos dar dos opciones como posible cantidad de anillos que tiene cada planeta.