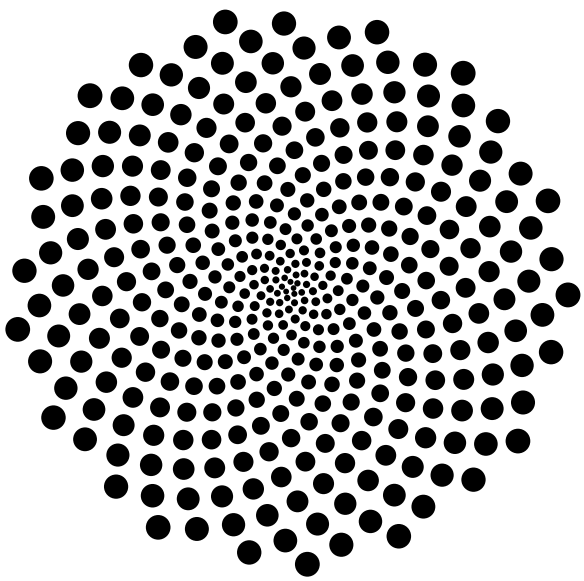
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL



III Nivel

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2017

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del lunes 02 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Considere el cuadrado $\square ABCD$, con $AB = 8$ cm. Una circunferencia tangente a $\overline{BC}$ contiene a los vértices A y D. La longitud, en centímetros, del radio de la circunferencia es

   (a) 4

   (b) 5

   (c) 6

   (d) $4\sqrt{2}$

2. En cada casilla de una cuadrícula de 2×2 se desea escribir los números 1, -1 o 0 de manera que ninguna fila o columna sume cero. La cantidad máxima de maneras en que es posible escribir estos números es

   (a) 9

   (b) 12

   (c) 18

   (d) 36

3. Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, tal que $m\angle ACB = 90°$, $AC = 3$ y $CB = 4$. Sea O un punto tal que $A - O - B$. Si una circunferencia de centro O es tangente a $\overline{AC}$ en Q y a $\overline{BC}$ en P, entonces OP es

   (a) $\dfrac{12}{7}$

   (b) $\dfrac{7}{12}$

   (c) $\dfrac{9}{7}$

   (d) 6

4. Sean a, b y c números reales, con $a \neq c$. Sean

$$P(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$$

$$Q(x) = 3x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 2$$

Las condiciones que deben cumplir los números a, b y c para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes son

(a) $a = 3$ y $b = c$

(b) $b = -5$ y $a = -c$

(c) $c = -3$ y $a = b$

(d) $b = 5$ y $c = 2a$

5. Sean f y g funciones. Si g es lineal, $g\,(3) = 5$, $f\,(2) = 7$ y $g\,(x) \cdot g\,(x+1) = f\,(x) + 8$, entonces $f\,(3)$ es

(a) 22

(b) 23

(c) 27

(d) 35

6. Considere los números $p = n\left(n^2 - 1\right)$ con n entero y $1 \leq n \leq 2017$. La cantidad de números p que terminan en 0 es

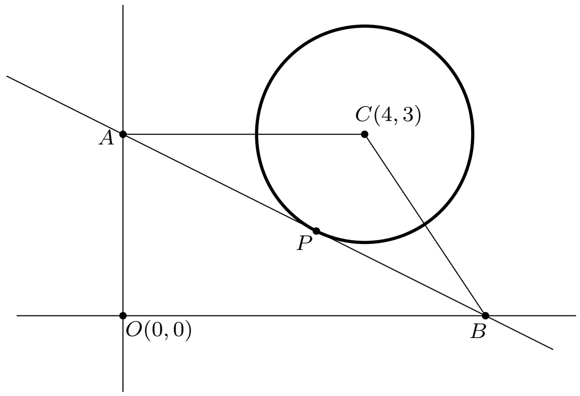
(a) 1209

(b) 1210

(c) 1211

(d) 1212

7. En la figura adjunta, A y B están en los ejes de coordenadas, la recta que contiene los puntos A y B tiene ecuación $x+2y=6$, C es el centro de la circunferencia, las coordenadas de C son $(4,3)$, la recta es tangente a la circunferencia en el punto P. El área del círculo de centro C es



   (a) 16π

   (b) $8\pi\sqrt{5}$

   (c) $\dfrac{16\pi}{5}$

   (d) $\dfrac{8\pi\sqrt{5}}{5}$

8. Si se tiene que n es un entero positivo y que la fracción $\dfrac{n^2+6n}{n+1}$ es un entero, entonces el valor de esta fracción es

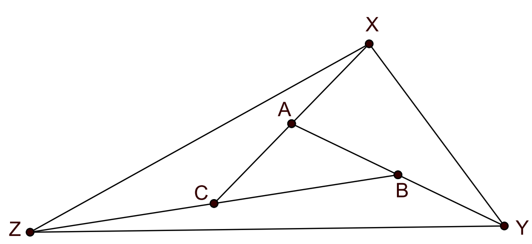
   (a) 0

   (b) 5

   (c) 8

   (d) 15

9. Los tres lados del $\triangle ABC$ se prolongan una distancia igual a sus respectivas longitudes, tal y como se observa la figura adjunta. Si el área del $\square XCBY$ es 18 cm^2, entonces el área en cm^2 del $\triangle XYZ$ es



   (a) 28

   (b) 30

   (c) 36

   (d) 42

10. La cantidad máxima de valores enteros que puede tomar n para los cuales la ecuación $x^2 + nx - n = 0$ tenga soluciones enteras es

    (a) 1

    (b) 2

    (c) 3

    (d) 4

11. Suponga que $P(x)$ es un polinomio de grado cuatro, con coeficiente principal igual a uno. Se sabe que para un número n, $P(n-2) = 1$, $P(n-1) = 1$, $P(n) = 1$ y $P(n+1) = 1$. El valor de $P(n+5) - P(n-4)$ es

    (a) 720

    (b) 360

    (c) 120

    (d) 0

12. En una casa donde cuidan gatos hay camas para gatos y el cuidador observó que:

    - En cada cama que hay en la casa han dormido seis gatos.
    - Cada gato usó exactamente tres camas distintas.
    - Por cada posible trío de camas hubo exactamente uno y solo un gato que usó las tres camas.

    Se puede afirmar que el total de gatos en la casa es

    (a) 10

    (b) 15

    (c) 18

    (d) 21

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Sean x, y y z tres números reales positivos. Si se cumple simultáneamente que:
   - $\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}+\sqrt[4]{\frac{y}{x}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\frac{x}{z}}+\sqrt[4]{\frac{z}{x}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\frac{z}{y}}+\sqrt[4]{\frac{y}{z}}\right)^2=2017$
   - $\sqrt{4xy}+\sqrt{4xz}+\sqrt{4yz}=4-x-y-z$

   Determine el valor de $\dfrac{1}{19\sqrt{x}}+\dfrac{1}{19\sqrt{y}}+\dfrac{1}{19\sqrt{z}}$

2. Considere el $\triangle ABC$, con $BC=1$, $m\angle ABC=60°$ y el radio del circuncírculo es $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Si D es otro punto en el circuncírculo del $\triangle ABC$, tal que $\overline{DC}$ pasa por el punto medio de $\overline{AB}$, determine DB.

3. En un torneo de fútbol durante la copa Europa–América, hubo nueve equipos más de Europa que de América. Cada pareja de equipos jugó exactamente una vez y, en total, los equipos europeos ganaron nueve veces tantos partidos como los ganados por los equipos americanos. Si no hubiera empates y el número de partidos ganados por los equipos americanos a los equipos europeos es seis, determine la cantidad de equipos americanos que participaron en dicha copa intercontinental.