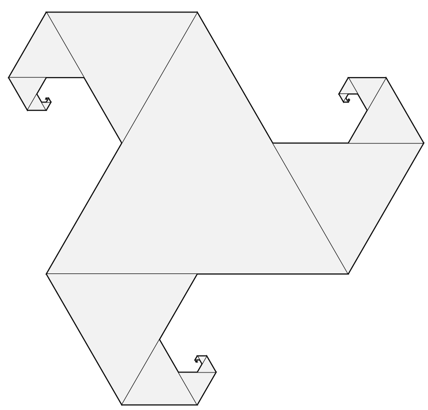
XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICAS

OLCOMA

SEGUNDA ELIMINATORIA



Nivel III

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2020

Ministerio de Educación Pública

UNA UNIVERSIDAD NACIONAL COSTA RICA

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

micitt MINISTERIO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA Y TELECOMUNICACIONES

UNED UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA

TEC Tecnológico de Costa Rica

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2020 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Segunda Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del XXX, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Galilea visita a su amigo Bruno y le plantea un juego para salir de la rutina. Cada uno da 25 monedas de 100 colones, el juego consiste en que cada jugador extrae, alternadamente, una, dos, tres o cuatro monedas del montón y gana quién hace la última extracción.
   Al analizar el juego, con certeza se tiene que:
   (a) El jugador que inicie puede establecer la estrategia para ganar.
   (b) El jugador que haga el segundo turno puede establecer la estrategia para ganar.
   (c) No es posible plantear una estrategia ganadora.
   (d) El juego puede acabar en empate.

2. Considere un triángulo $\triangle ABC$ con $AB = AC$, $m\angle BAC = 120°$ y $BC = 2$. La medida del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo corresponde a
   (a) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
   (b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
   (c) $2\sqrt{3}$
   (d) $\sqrt{3}$

3. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a + b + c = 10$ y $a^2 + b^2 + c^2 = 99$. El valor de $ab + bc + ca$ corresponde a:
   (a) 10
   (b) 1
   (c) 2
   (d) $\frac{1}{2}$

4. La cantidad de números enteros n tales que $\frac{2n-1}{n+7}$ sea un número entero corresponde a:
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 4
   (d) 8

5. En un torneo de boliche jugarán 9 equipos; cada equipo jugará una vez contra cada uno de los otros 8 equipos y no se permiten empates. En cada juego, al ganador se le otorgará 1 punto y al perdedor 0 puntos. Si se eliminan todos los equipos que al final del torneo hayan acumulado 2 puntos o menos, la máxima cantidad de equipos que podrán quedar eliminados corresponde a:

   (a) 3
   (b) 4
   (c) 5
   (d) 6

6. La cantidad de pares ordenados (x, y) de números enteros positivos tales que $(x+y)^2 - 13 = (xy-6)^2$ corresponde a

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 4

7. La cantidad de números menores a 30 000, de cinco cifras, con la forma $a2ba0$, con a y b dígitos, que son divisibles por los cuatro primeros números primos es

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3

8. Considere un reloj con agujas que marcan las horas y los minutos. ¿A qué hora entre las 4 y las 5 la aguja del minutero y la aguja de la hora forman por primera vez un ángulo de 45°?.

   (a) 4 con 13 minutos.
   (b) 4 con $\dfrac{148}{11}$ minutos.
   (c) 4 con $\dfrac{150}{11}$ minutos.
   (d) 4 con $\dfrac{152}{11}$ minutos.

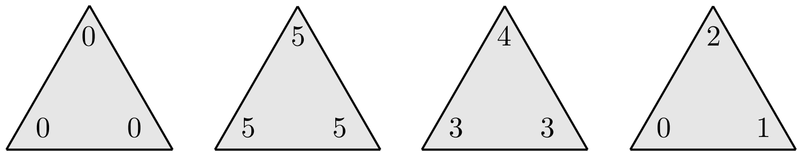
9. Un juego tiene fichas triangulares con números del 0 al 5 en cada esquina. Las fichas incluyen todas las combinaciones desde $0, 0, 0$ hasta $5, 5, 5$ y no importa el orden. Algunas posibles fichas se muestran en la figura. La cantidad total de fichas que tiene el juego es

   (a) 55

   (b) 56

   (c) 59

   (d) 60



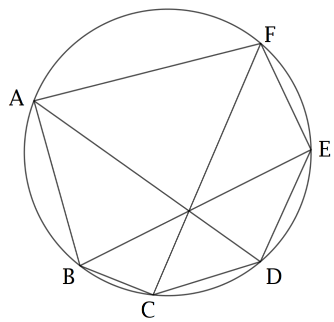
10. Un hexágono $ABCDEF$ satisface que se puede inscribir en un círculo y que las tres diagonales AD, BE y CF pasan por un mismo punto (la figura es ilustrativa y las longitudes no corresponden al problema). Si las medidas de los lados AB, BC, CD, DE y EF son 1, 2, 4, 8 y 16, en ese orden, entonces la longitud de FA es igual a:

   (a) 4

   (b) 8

   (c) 16

   (d) 32



11. Sea $N = 12345678910111213 \cdots 525354$ el número de 99 dígitos formado al escribir todos los números enteros desde 1 hasta 54 en orden creciente. El residuo de la división de N entre 45 es

   (a) 1

   (b) 4

   (c) 9

   (d) 18

12. Considere los números 222^{333} y 333^{222}, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

   (a) $222^{333} = 333^{222}$

   (b) $2 \cdot 222^{333} = 333^{222}$

   (c) $222^{333} > 333^{222}$

   (d) $222^{333} < 333^{222}$

II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en hojas adicionales. **Debe responder cada pregunta en hojas separadas**. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero de lado 2 y $\square BCDE$ un cuadrado que contiene al punto A en su interior. Determine el área de la circunferencia que contiene los puntos A, D y E.

2. Determine la mayor suma posible S de enteros positivos $S = x + y$ que satisfacen la ecuación $x^2 - 5 \cdot 2^y = 9$.