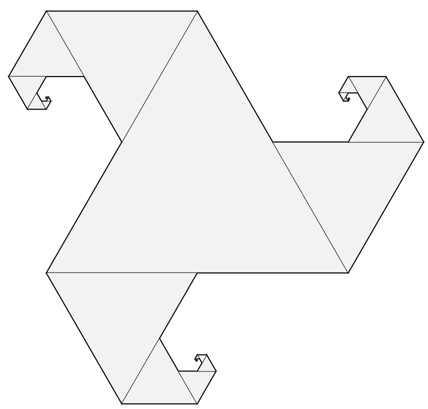
XXXIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UNED - MICITT

SOLUCIÓN

II ELIMINATORIA



Nivel III

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2021

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con dos preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas de selección única que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en el sistema de EstudiaU.
- Las respuestas a las preguntas de desarrollo se envían para calificación utilizando la misma herramienta de cuestionario en la plataforma, debe adjuntar imágenes claras y legibles, además de incluir todo el procedimiento requerido.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas. Una hora extra para digitalizar y subir las soluciones al desarrollo.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Gokú utilizó la teletransportación para ir desde la Tierra hasta un planeta cercano a un agujero negro llamado Gargantúa. Debido a la gravedad del agujero negro, por cada hora que pasa en dicho planeta, en la Tierra pasan 7 años. Si Gokú se fue el viernes 1º de enero del 2 021 a las 6 de la tarde y estuvo en ese planeta 5 segundos y regresó a la Tierra, el día que regresó fue

   (a) lunes
   (b) martes
   (c) miércoles
   (d) viernes

- Opción correcta: (b)
- Solución:

$$\frac{1 \text{ hora}}{7 \text{ años}} = \frac{3600 \text{ segundos}}{2555 \text{ días}} = \frac{5 \text{ segundos}}{x \text{ días}} \Rightarrow x = \frac{(5 \text{ segundos})(2555 \text{ días})}{3600 \text{ segundos}} = \frac{511}{144} \text{ días}$$

$511 \div 144 \approx 3{,}55$ días

Como se fue un viernes a las 6pm, regresó un martes aproximadamente a las 7 de la mañana.

2. Si $(a+b)^2 = 14$ y $(a-b)^2 = 2$, el valor de $a(a+5b)+b^2$ es

   (a) 20
   (b) 21
   (c) 22
   (d) 23

- Opción correcta: (d)
- Solución:
  $(a+b)^2 = 14 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 14 \quad (1)$

  $(a-b)^2 = 2 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 2 \quad (2)$

  Restando (1) y (2) se tiene

  $$(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = 14 - 2 \Rightarrow 4ab = 12 \Rightarrow ab = 3$$

  Sustituyendo esto en (1) se tiene $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 6 + b^2 = 14 \Rightarrow a^2 + b^2 = 8$

  Por otra parte $a(a+5b) + b^2 = a^2 + 5ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 5ab = 8 + 5 \cdot 3 = 23.$

3. La suma de las cifras del número

$$10^{2021} - 999$$

corresponde a

(a) 2021
(b) 18163
(c) 18172
(d) 18189

- Opción correcta: (b)
- Solución:

Puede notarse que el número $10^n - 999$ es de la forma $\underbrace{9\cdots9}_{n-3}001$, con $n > 3$ es decir, el número $10^{2021} - 999$ está formado por 2018 nueves y las tres cifras finales son 001, por lo que las suma de las cifras es $2018 \cdot 9 + 1 = 18163$

4. Sean m y n dos números enteros positivos distintos, tales que $m^2 - n^2 + 1 = 2021 - 2m$. Entonces $m + n$ es igual a

   (a) 44
   (b) 46
   (c) 2020
   (d) 2021

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Observe que

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 + 1 = 2021 - 2m \quad &\Rightarrow \quad m^2 + 2m + 1 - n^2 = 2021 \\ &\Rightarrow \quad (m+1)^2 - n^2 = 2021 \\ &\Rightarrow \quad (m+n+1)(m-n+1) = 2021 \end{aligned}$$

  Como m y n son números enteros positivos entonces $m + n + 1$ es positivo, y en consecuencia $m - n + 1$ también. Además, es claro que $m + n + 1 > m - n + 1$. Por otro lado, $2021 = 1 \times 2021 = 43 \times 47$. Se analiza cada uno de los casos.

  Caso 1.

  En este caso,

$$\begin{cases} m + n + 1 = 2021 \\ m - n + 1 = 1 \end{cases}$$

  De la segunda ecuación se tiene que $m = n$, pero esto no cumple lo pedido, pues m y n deben ser diferentes.

  Caso 2.

  En este caso,

$$\begin{cases} m + n + 1 = 47 \\ m - n + 1 = 43 \end{cases}$$

  Sumando las ecuaciones se obtiene que $2m + 2 = 90$, y entonces $m = 44$. Restando las ecuaciones se obtiene que $2n = 4$, luego $n = 2$. En este caso, $m + n = 44 + 2 = 46$.

5. Considere el $\triangle ABC$. Se sabe que $AB = 9$, $AC = 12$ y $BC = 15$. Sea D el pie de la altura desde A sobre BC. Sean r_1 y r_2 los radios de los círculos circunscritos a $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ respectivamente (el círculo circunscrito a un triángulo es el que pasa por sus vértices). Entonces $\dfrac{r_1}{r_2}$ es igual a

   (a) $\dfrac{5}{3}$

   (b) $\dfrac{3}{5}$

   (c) $\dfrac{4}{3}$

   (d) $\dfrac{3}{4}$

- Opción correcta: (a)

- Solución: Por el inverso del Teorema de Pitágoras se deduce que $\triangle ABC$ es rectángulo, con ángulo recto en A. En consecuencia, BC es un diámetro del círculo circunscrito a $\triangle ABC$, es decir $r_1 = \dfrac{15}{2}$. Análogamente $\triangle ABD$ es rectángulo por construcción, con ángulo recto en D, es decir, $r_2 = \dfrac{9}{2}$. Por lo tanto

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{5}{3}.$$

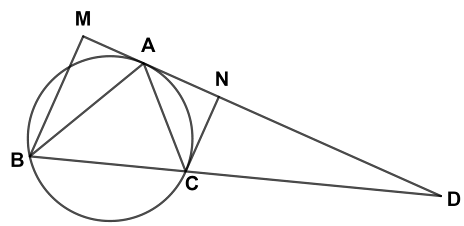
6. En la figura, $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ son perpendiculares a $\overline{MD}$, con $\overline{MD}$ tangente al círculo en A. Si $BC = 6$, $CN = 8$ y $AD = 4\sqrt{10}$, entonces el área del cuadrilátero $MNCB$ corresponde a

   (a) $\dfrac{192\sqrt{91} - 1200}{25}$

   (b) $\dfrac{96\sqrt{91} - 600}{25}$

   (c) $\dfrac{1872}{25}$

   (d) $\dfrac{936}{25}$



- Opción correcta: (d)
- Solución: Sea $x : CD$. Se tiene que $(4\sqrt{10})^2 = x(x+6)$, de donde se obtiene que $x = 10$. Luego por semejanza de los triángulos MBD y NCD, se obtiene que $\dfrac{MB}{8} = \dfrac{16}{10}$ y así $MB = \dfrac{64}{5}$. Luego por Pitágoras, se obtiene que $ND = 6$ y $MD = \dfrac{48}{5}$.

  Además, se tiene que: $(MNCB) = (MDB - NDC) = \dfrac{\frac{67}{5} \cdot \frac{48}{5}}{2} - \dfrac{8 \cdot 6}{2} = \dfrac{936}{25}$

  Por tanto el área del $\square MNCB$ es $\dfrac{936}{25}$.

7. Sean x y y números reales tales que $x^3 = 3(x^2y+5)$ y $y^3 = 3(y^2x+4)$. Entonces $y-x$ es igual a

   (a) -3
   (b) 3
   (c) $\sqrt[3]{3}$
   (d) $-\sqrt[3]{3}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Como $x^3 = 3(x^2y+5) = 3x^2y+15$, entonces $x^3 - 3x^2y = 15$. Análogamente, como $y^3 = 3(y^2x+4) = 3y^2x+12$, entonces $y^3 - 3y^2x = 12$. Por otro lado, observe que

  $$(y-x)^3 = y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3 = (y^3 - 3y^2x) - (x^3 - 3x^2y) = 12 - 15 = -3.$$

  En consecuencia, $y - x = \sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$.

8. Ana y Carlos recolectan un total de 506 frutas, entre fresas y moras, las colocan en un mismo recipiente y deciden comerlas tomando por turnos una de las frutas del recipiente. Ana para iniciar, decide lanzar una moneda, si cae corona se come una fresa sino se come una mora. Luego le propone a Carlos que: quien se coma de primero la última de alguna de las frutas, ya sea la última fresa o la última mora, deberá recolectar todas las frutas la próxima vez que se encuentren.

   Según el contexto anterior se puede afirmar con certeza que

   (a) a Carlos le corresponde recolectar la próxima vez.
   (b) a Ana le corresponde recolectar la próxima vez
   (c) no se puede deducir a quién le corresponde recolectar la próxima vez
   (d) el resultado de la moneda determina a quién le corresponde recolectar la próxima vez

- Opción correcta: (b)
- Como ellos recolectan 506 frutas que es un número par y Ana se come una de ellas (sin que importe el resultado de la moneda) habrá un número impar de frutas, por lo tanto, la cantidad de fresas y moras tienen diferente paridad. Como le toca a Carlos, él puede elegir de la cantidad de frutas que sea par, así Ana escogerá una fruta de cantidades impares (de fresas y moras) de ese modo Carlos come del grupo par y Ana de grupos impares, al final Carlos comerá la penúltima de cada fruta y entonces a Ana le corresponde recolectar la próxima vez.

9. Si $x+y=2\sqrt{5}$ y $x^2+y^2=12$, con $x>y$, entonces el valor númerico de x^6-y^6 corresponde a

   (a) $64\sqrt{5}$

   (b) $128\sqrt{5}$

   (c) $256\sqrt{5}$

   (d) $512\sqrt{5}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:

$$\begin{aligned} x^6-y^6 &= \left(x^3\right)^2-\left(y^3\right)^2 \\ &= (x^3-y^3)(x^3+y^3) \\ &= (x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2) \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que:

$$x+y=2\sqrt{5}$$
$$(x+y)^2=20$$
$$x^2+2xy+y^2=20$$

como $x^2+y^2=12$ entonces

$$12+2xy=20$$
$$xy=4$$

Además,

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$
$$(x-y)^2=12-8$$
$$x-y=2$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} x^6-y^6 &= (x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2) \\ &= 2\cdot(12+4)\cdot 2\sqrt{5}\cdot(12-4) \\ &= 512\sqrt{5} \end{aligned}$$

10. Considere un polinomio cúbico $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ tal que $P(-1) = 5$, $P(0) = 8$, $P(1) = 13$ y $P(2) = 21$. Entonces el valor de $P(3)$ es igual a
    (a) 32

    (b) 33

    (c) 34

    (d) 35

- Opción correcta: (b)
- Solución: Tenemos entonces que

$$-A + B - C + D = P(-1) = 5, \qquad D = P(0) = 8,$$

$$A + B + C + D = P(1) = 13, \qquad 8A + 4B + 2C + D = P(2) = 21.$$

La primera y tercera ecuación nos dan que $A + C = 4$ y $B + D = 9$. Esto combinado con la segunda nos da que $B = 1$. Finalmente,

$$21 = 8A + 4B + 2C + D = 6A + 2(A + C) + 4B + D = 6A + 8 + 4 + 8 = 6A + 20,$$

lo que implica que $A = 1/6$. De esto concluimos que $C = 4 - 1/6 = \frac{23}{6}$. Por lo tanto,

$$P(3) = 27A + 9B + 3C + D = \frac{27}{6} + 9 + \frac{23}{2} + 8 = \frac{9 + 23}{2} + 17 = 16 + 17 = 33.$$

11. Considere el número positivo

$$N = \frac{9}{10} + \frac{99}{10^2} + \frac{999}{10^3} + \cdots + \frac{999\ldots9}{10^{2021}}$$

en donde el último numerador tiene 2021 nueves. La cantidad de dígitos iguales a 8 que hay en la representación decimal de N corresponde a

(a) 2019
(b) 2020
(c) 2021
(d) 2022

- Opción correcta: (b)
- Solución: Observe que
$N = \frac{9}{10}+\frac{99}{10^2}+\frac{999}{10^3}+\cdots+\frac{999\ldots9}{10^{2021}} = \left(1-\frac{1}{10}\right)+\left(1-\frac{1}{10^2}\right)+\left(1-\frac{1}{10^3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{10^{2021}}\right)$
$= 2021 - \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^{2021}}\right) = 2021 - 0{,}1111\ldots1$
donde el término restando tiene 2021 decimales. La resta es igual a $2020, 88\ldots89$ en donde hay 2021 decimales de los cuales 2020 son iguales a 8 y el último es igual a 9.

Observe que:
$\frac{1}{10} = 0,1$
$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} = 0,1 + 0,01 = 0,11$
$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} = 0,1 + 0,01 + 0,001 = 0,111$
de donde se obtiene que $\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^{2021}} = \underbrace{0,111...1}_{2021\ unos}$

12. Considere un triángulo cuyos lados miden entre $3cm$ y $4cm$ (por ejemplo, pueden medir 3,1cm, 3,14cm y 3,5cm). Con respecto a la medida de los ángulos del triángulo, se puede afirmar con total certeza que

    (a) hay al menos dos ángulos menores que 65°
    (b) hay al menos un ángulo menor que 55°
    (c) hay al menos dos ángulos mayores que 45°
    (d) ninguna de las opciones anteriores es correcta

- Opción correcta: (c)
- Solución: Primero, al considerar un triángulo equilátero descartamos la opción de que haya al menos uno menor que 55°. Consideramos ahora el triángulo ABC de lados $BC = 3u$, $AB = AC = 4u$. En este caso, tenemos que

$$\cos A = \frac{4^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{16 + 16 - 9}{32} = \frac{23}{32}.$$

Ahora observamos que $23/32 \geq 1/\sqrt{2}$, ya que

$$\frac{23}{32} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow 23 \geq 16\sqrt{2} \Longleftrightarrow 529 \geq 512,$$

lo cual es cierto. Esto implica que $\cos A \geq 1/\sqrt{2} = \cos 45°$, y por lo tanto $m\angle A < 45°$. Además, $m\angle B = m\angle C = (180° - A)/2 > 135°/2 > 65°$. Esto elimina la posibilidad que al menos dos ángulos sean menores que 65°.

Vamos a demostrar que hay al menos dos ángulos que son mayores que 45°. Consideramos un triángulo ABC con $m\angle A \geq m\angle B \geq m\angle C$. Primero observamos lo siguiente: si denotamos por a, b, c los lados del triángulo, entonces tenemos que

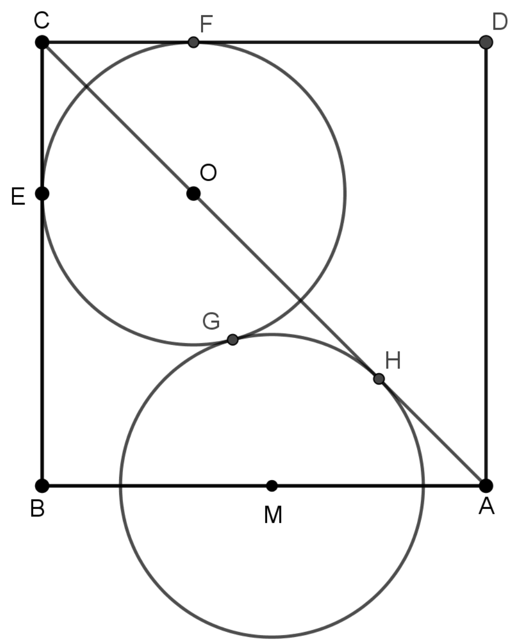
$$b^2 + c^2 - a^2 \geq 3^2 + 3^2 - 4^2 = 9 + 9 - 16 = 2 > 0,$$

por lo que $m\angle A < 90°$. Esto implica que $m\angle B + m\angle C \geq 90°$, y por lo tanto $2m\angle B \geq m\angle B + m\angle C \geq 90°$, es decir, $m\angle B > 45°$. Con esto concluimos que $m\angle A$ y $m\angle B$ son mayores que 45°.

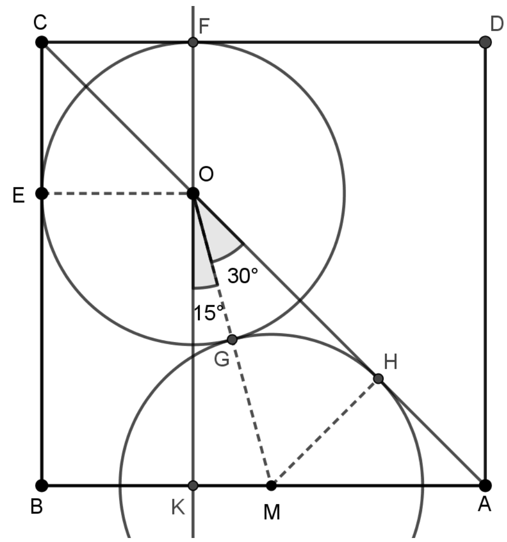
II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. En la siguiente figura $ABCD$ es un cuadrado, las dos circunferencias (de centro O y M) son congruentes, los puntos E, F, G y H son puntos de tangencia y $EB = \sqrt{6} + \sqrt{2}$. Determine la medida del diámetro de las circunferencias.



- Solución: Considere la recta $\overleftrightarrow{OK}$ perpendicular a $\overline{AB}$ y el segmento $\overline{OM}$. Como $EOFC$ es un cuadrado, $KA = BE = KO$ por lo tanto $\triangle OKA$ es isósceles, con ángulos de 45°. Ademas $\triangle OMH$ es rectángulo y su hipotenusa mide el doble que uno de sus catetos, por lo tanto es el triángulo especial 30°, 60°, entonces $m\angle KOM = 15°$, como $\tan(15°) = \dfrac{KM}{KO} = \dfrac{KM}{EB} = \dfrac{KM}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$. Lo que significa que $KM = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Aplicando Pitágoras al $\triangle OKM$ se tiene que $OM = 4$ que es igual a dos radios.



Solución alternativa: Sea r el radio de las circunferencias. Empezamos notando que $\angle ECO = \angle HAM = 45°$, y por lo tanto los triángulos $\triangle CEO$ y $\triangle AHM$ son rectángulos isósceles. Esto implica que $CE = AH = r$ y $CO = r\sqrt{2}$.

Por el teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle OHM$ tenemos que $HO = \sqrt{OM^2 - HM^2} = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3}$.

Por lo tanto, la longitud de la diagonal AC es $AH+HO+CO = r+r\sqrt{3}+r\sqrt{2} = r(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Esto implica que

$$BE = BC - CE = \frac{r(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}} - r = \frac{r(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}.$$

Usando que $BE = \sqrt{6}+\sqrt{2}$, deducimos que $r = \sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})/(1+\sqrt{3}) = 2$, y por lo tanto el diámetro de las circunferencias es igual a 4.

2. Considere los posibles resultados de sumar o restar los números enteros $1, 2, 3, ..., 2021$, es decir, todas las combinaciones de la forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm 2021$, donde la escogencía de los 2021 signos es independiente entre sí.
Determine la cantidad total de posibles resultados distintos.

- Solución: Empezamos con tres observaciones: primero, la mayor suma que se puede alcanzar es $1+2+\ldots+2021 = 2021 \cdot 2022/2 = 1011 \cdot 2021$; segundo, la escogencia de los signos no cambia la paridad, por lo que todas las posibles sumas van a ser impares; tercero, si podemos representar a n, entonces cambiando los signos también podemos representar a $-n$. Lo anterior implica que es suficiente contar cuántos enteros positivos pueden representarse de esta forma, de manera que el resultado es igual al doble de esta cantidad (para tomar en cuenta los negativos); no hace falta considerar al cero porque es par y todas las posibles sumas van a ser impares.

  Vamos a demostrar ahora que todo impar entre 1 y $1011 \cdot 2021$ se puede representar de esta forma. Mostramos cómo proceder en un ejemplo más pequeño para que la exposición sea más clara. Por ejemplo, con $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5$ la mayor suma es $1+2+3+4+5 = 15$. Luego, podemos decrecer sucesivamente por dos unidades estas sumas moviendo el signo negativo de izquierda a derecha y agregando nuevos signos negativos una vez que llegamos al final. Por ejemplo, así podemos representar

$$1+2+3+4+5 = 15, \quad -1+2+3+4+5 = 13, \quad 1-2+3+4+5 = 11, \quad 1+2-3+4+5 = 9,$$

$$1+2+3-4+5 = 7, \quad 1+2+3+4-5 = 5, \quad -1+2+3+4-5 = 3, \quad 1-2+3+4-5 = 1.$$

  La forma de proceder en nuestro caso es análogo, y por lo tanto la cantidad total de numeros es igual al doble de la cantidad de impares entre 1 y $1011 \cdot 2021$ (inclusive), es decir, es igual a

$$2 \cdot \left(\frac{1011 \cdot 2021 - 1}{2} + 1 \right) = 1011 \cdot 2021 - 1 + 2 = 1011 \cdot 2021 + 1.$$