XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT

BANCO DE PROBLEMAS

DÍA 1

I Nivel

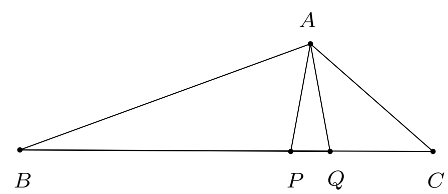
7°

Lunes 14 de noviembre del 2016

Geometría

1. Sean el $\triangle ABC$ tal que $m\angle ABC = 20°$ y $m\angle ACB = 40°$, P y Q puntos en $\overline{BC}$ tales que $B-P-Q-C$ y $\overline{AP}$ el segmento que biseca al $\angle BAC$ y $AB = BQ$. Si $AP = 2$, determine QC.

   • Solución:
   Considere la figura:



Por suma de ángulos internos del $\triangle ABC$ se tiene que $m\angle BAC = 120°$.

Como $AB = BQ$ se tiene $\triangle ABQ$ es isósceles y entonces $m\angle BQA = m\angle BAQ = 80°$.

De lo anterior podemos deducir que $m\angle CAQ = 40°$, y como $m\angle ACB = 40°$ tenemos que $\triangle AQC$ es isósceles con $AQ = QC$.

Como $\overline{AP}$ biseca al $\angle BAC$ se tiene que $m\angle BAP = 60°$ y entonces $m\angle PAQ = 20°$.

Por suma de ángulos internos en el $\triangle APQ$ tenemos que $m\angle APQ = 80°$ y así $\triangle APQ$ es isósceles con $AP = AQ$ y entontonces $QC = 2$.

2. Sea el $\triangle ABC$ un triángulo cuya área es 6 cm^2. Si P, Q y R son los puntos medios sobre $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, y G es el punto de intersección de $\overline{CP}$, $\overline{AQ}$ y $\overline{BR}$, determine el área del $\square APGR$.

   • Solución:

   Los triángulos $\triangle BGP$ y $\triangle AGP$ tienen igual área ya que poseen la misma altura y las bases $\overline{BP}$ y $\overline{AP}$ son congruentes. Sea A_1 el área de cada uno de estos triángulos.

   De forma análoga se puede verificar que los triángulos $\triangle AGR$ y $\triangle CGR$ tienen igual área A_2 y $\triangle CGQ$ y $\triangle BGQ$ tienen igual área A_3.

   También los triángulos $\triangle ARB$ y $\triangle CRB$ tienen igual área, por lo tanto $2A_1 + A_2 = 2A_3 + A_2$, de donde $A_1 = A_3$.

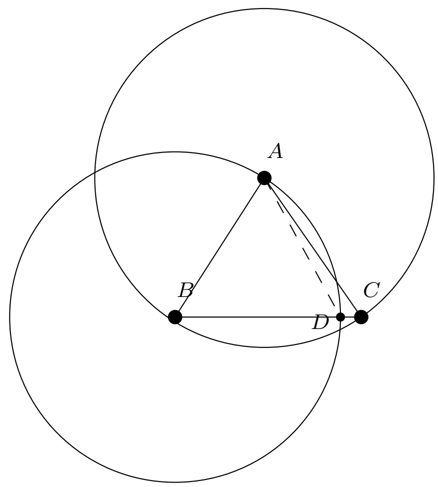
   A partir del mismo razonamiento se obtiene que los triángulos $\triangle ABQ$ y $\triangle ACQ$ tienen igual área, por lo que $2A_1 + A_3 = 2A_2 + A_3$, de donde $A_1 = A_2$.

   Así $A_1 = A_2 = A_3 = 1\ cm^2$.

   $\therefore$ El área del $\square APGR$ es $2\ cm^2$.

3. Sean el $\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$, T la circunferencia de centro B que pasa por A. Suponga que T corta al interior del $\overline{BC}$ en el punto D y $m\angle CAD = 15°$. Encuentre la medida de $\angle ABC$.

• Solución:



Sea $\alpha = m\angle ABC$. Al ser el $\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$, $m\angle ACB = \alpha$ también. Al ser T un círculo de centro B que pasa por A y D, se tiene que $BA = BD$, por lo cual $m\angle BAD = m\angle BDA = \dfrac{180° - \alpha}{2}$. Por el teorema de suma de ángulos internos de un triángulo, $180° = m\angle ACB + m\angle ABC + m\angle BAC = \alpha + \alpha + m\angle BAD + m\angle DAC = \alpha + \alpha + \dfrac{180° - \alpha}{2} + 15° \Rightarrow 180° - 15° - 90° = 2\alpha - \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow 75° = \dfrac{3\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 50°$. Por lo cual $m\angle ABC = 50°$.

Teoría de Números

1. Hallar el menor número natural que es suma de 10 naturales consecutivos, de 11 naturales consecutivos y de 13 naturales consecutivos.

Solución

Sea n el número natural que cumple las condiciones del enunciado.

Para $a > 4$ se cumple que

$$\begin{aligned} n &= (a-4)+(a-3)+(a-2)+(a-1)+a+(a+1)+(a+2)+(a+3) \\ &\quad +(a+4)+(a+5) \\ n &= 10a+5 \\ n &= 5(2a+1) \end{aligned}$$

Esto indica que n es múltiplo de 5, pero no de 10.

Para $b > 5$ se cumple que

$$\begin{aligned} n &= (b-5)+(b-4)+(b-3)+(b-2)+(b-1)+b+(b+1)+(b+2) \\ &\quad +(b+3)+(b+4)+(b+5) \\ n &= 11b \end{aligned}$$

Esto indica que n es múltiplo de 11.

Para $c > 6$ se cumple que

$$\begin{aligned} n &= (c-6)+(c-5)+(c-4)+(c-3)+(c-2)+(c-1)+c+(c+1)+(c+2) \\ &\quad +(c+3)+(c+4)+(c+5)+(c+6) \\ n &= 13c \end{aligned}$$

Esto indica que n es múltiplo de 13.

El menor número natural que cumple que es múltiplo de 5 (pero no de 10), de 11 y de 13 es $n = 5 \cdot 11 \cdot 13 = 715$.

$\therefore$ El menor número natural que es suma 10 naturales consecutivos, de 11 naturales consecutivos y de 12 naturales consecutivos es 715.

2. Considere la sucesión de números definida por

$$A_1 = 1234567890,\ A_2 = 8901234567,\ A_3 = 5678901234, \ldots$$

   a) Determine el menor n tal que $A_n = A_1$.

   b) Calcule A_{2016}.

   c) Sea $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{2015}\}$. Determine cuántos números impares tiene $\mathcal{A}$.

• Solución:

Observe que los dígitos en los números se van moviendo tres espacios hacia la izquierda, una vez que se sabe cual es el primer dígito todos los demás quedan determinados. Verificando directamente se ve que al primer dígito se le resta 3 en cada paso (resta módulo 3), luego, los dígitos obtenidos son $1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0, 7, 4, 1$, es decir, $A_{11} = A_1$. Es inmediato que no hay un n menor tal que $A_n = A_1$, esto porque 3 y 10 son primos relativos.

Usando lo anterior, se puede ver que los valores se van a repetir cada 10, como $2016 = 2010 + 6$, entonces $A_{2016} = A_6 = 6789012345$.

Finalmente, es fácil ver que en cada diez términos, la mitad son pares y la mitad son impares, es decir, hasta A_{2010} hay 1005 impares, de los últimos 5 sólo dos son impares, de donde el total es 1007.

3. Considere 5 números enteros positivos. Determine si es posible escoger 3 de ellos cuya suma sea múltiplo de 3.

Solución:

Haciendo la división entre 3 de cada uno de ellos, entonces una de las siguientes dos opciones debe suceder:

- 3 números con resto $0, 1, 2$. En este caso la suma de ellos es múltiplo de 3.

- Si hay uno de cada resto, esos 3 números suman un múltiplo de 3.

En cualquier caso hay tres cuya suma es múltiplo de 3.

Razonamiento Lógico

1. Del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ se seleccionan al azar cuatro números distintos, sin importar el orden en que se elijan. Por ejemplo, escoger los números 3, 1, 10 y 11 es lo mismo que elegir 11, 1, 3 y 10. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los cuatro números sea impar?

   • Solución:
   Primero se deben calcular la cantidad de combinaciones que producen efectivamente una suma impar. Esto se logrará con tres pares y uno impar o bien tres impares y un par. Para el primer caso, los tres pares se puede escoger $\dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6}$ formas, pues para la primera elección hay 7 posibilidades de número par, para la segunda hay 6 y para las tercera 5, pero no importa el orden en el que se elijan, por lo que se dividirá entre $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Ahora, para el número impar hay 7 posibilidades, por lo que se deben multiplicar por 7. Para un total de $\dfrac{7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 245$ maneras. Para el segundo caso hay la misma cantidad de formas, usando un razonamiento similar al anterior pero con impares en vez de pares.

   Ahora la cantidad de casos favorables es entonces $\dfrac{2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 490$.

   La cantidad de casos totales es $\dfrac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{24}$ pues para escoger cualquier cuatro números, la primera elección se puede hacer de 14 maneras, la segunda de 13, la tercera de 12, para la cuarta 11, pero no importa el orden en que se elijan, por lo que se dividirá entre $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Para un total de $\dfrac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{24} = 1001$

   Así, la posibilidad de que la suma de los números sea impar es $\dfrac{490}{1001} = \dfrac{70}{143}$

2. Se define W_n a la figura formada por n vértices y todas las aristas posibles, en la que dos aristas cualesquiera solo poseen en común el vértice que comparten.

   Justifique por qué se cumple que al pintar a cada una de las aristas de W_6 usando únicamente dos colores, entonces existe al menos un triángulo con sus tres lados del mismo color.

   • Solución:

   Suponga dos colores específicos (morado y blanco -por ejemplo).

   Eligiendo alguno de los seis vértices y llamándole P, se pintan las cinco aristas posibles con los dos colores selecccionados; así, al menos tres de estas aristas tendrán el mismo color (morado -por ejemplo).

   Sean Q, R y S los puntos tales que $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ y $\overline{PS}$ son las aristas moradas.

   El ΔPQS posee dos lados de color morado (las aristas $\overline{PQ}$ y $\overline{PS}$); si $\overline{QS}$ es de color morado, se tendría justificado lo solicitado y si $\overline{QS}$ es de color blanco, en ese triángulo solo dos lados son del mismo color.

   El ΔPSR posee dos lados de color morado (las aristas $\overline{PS}$ y $\overline{PR}$); si $\overline{RS}$ es de color morado, se tendría justificado lo solicitado y si $\overline{RS}$ es de color blanco, en ese triángulo solo dos lados son del mismo color.

   El ΔPQR posee dos lados de color morado (las aristas $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$); si $\overline{QR}$ es de color morado, se tendría justificado lo solicitado y si $\overline{QR}$ es de color blanco, en ese triángulo solo dos lados son del mismo color.

   Al considerar de color blanco a cada una de las aristas $\overline{QS}$, $\overline{RS}$ y $\overline{QR}$ se ha conseguido un triángulo cuyas aristas son todas del mismo color (el ΔQRS). Note que de no ser así, ya se hubiera conseguido el triángulo deseado, solo que de color morado.

3. En una clase de matemáticas hay 30 estudiantes, 14 mujeres y 16 hombres. Los pupitres están acomodados en forma rectangular con 5 filas de 6 pupitres, donde una fila es horizontal, en el sentido de que los demás pupitres de una fila están a los lados. El espacio entre dos filas es grande, de modo que los estudiantes en dos filas distintas no pueden hablar. Sin embargo, en cada fila, los estudiantes sí pueden hablar con los estudiantes a la izquierda o a la derecha. Cinco de los hombres se enteran que el próximo viernes no hay clases, pero es una sorpresa, y el profesor no va a decir en clases, ni debe enterarse que ellos saben, sin embargo, ellos van a comentar el secreto con los compañeros en la próxima clase. Los hombres solo hablan en clase con las mujeres, y las mujeres hablan con los hombres y también entre ellas. Justifique por qué independientemente de como estén sentados, al menos una persona no se va a enterar durante las clases.

   • Solución:

   Primero observe que hay cinco filas, si en una fila de estas no se sienta uno de los hombres que sabe el secreto entonces nadie lo va a saber en esa fila, pues los estudiantes solo hablan por filas. De modo que es necesario que uno se siente en cada fila. Por otro lado, como los estudiantes pueden hablar con los compañeros a la izquierda o la derecha, da igual adonde se sienten en cada fila los estudiantes que saben el secreto. Si H^* es un hombre que sabe el secreto, H es un hombre que no lo sabe y M es una mujer entonces la conformación en una fila donde todos saben el secreto debe ser en el mejor de los casos

$$HMH^*MHM$$

   pues si hay dos hombres consecutivos, estos no se van a comentar el secreto. Sin embargo, como hay 14 mujeres, esto no es posible, y en algún momento van a quedar dos hombres consecutivos, en cuyo caso, uno de ellos no va a saber el secreto.

4. En cada uno de los cuadros debe colocarse un dígito del 0 al 9, algunos dígitos pueden estar repetidos, otros pueden no aparecer. Determine todas las posibles soluciones para este esquema.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \square & \square \\
 & & \times & \square & \square \\
\cline{2-5}
 & \square & \square & \square & \square \\
+ & & 1 & \square & \square \\
\hline
\square & \square & \square & \square & \square
\end{array}
$$

- Solución:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \square & \square \\
 & & \times & \square & \square \\
\cline{2-5}
 & \boxed{a} & \boxed{b} & \square & \square \\
+ & & 1 & \boxed{d} & \boxed{e} \\
\hline
\square & \square & \boxed{c} & \square & \square
\end{array}
$$

Observamos primero que a y b deben ser 9 para que al sumarle 1 a b se obtenga un número de dos dígitos y se "lleve" un 1 de modo que genere el número de 5 dígitos. Sin embargo, el mayor número que puede obtenerse al multiplicar dos números de dos dígitos es $99 \times 99 = 9801$, por lo que $b = 8$.

De modo que $c = 9$, a menos que en la suma de los otros dígitos se obtenga algo mayor que 9. La única forma de lograr esto es que $d = e = 9$, con lo que se obtiene la siguiente solución

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & 9 & 9 \\
 & & \times & 9 & 9 \\
\cline{2-5}
 & 9 & 8 & 0 & 1 \\
+ & & 1 & 9 & 9 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Se observa que esta es la única solución posible, pues si se hace el producto de dos números de dos dígitos menores que 99, el mayor posible es $99 \times 98 = 9702$, sería imposible obtener un número de 5 dígitos al final, pues el mayor valor que podría tomar c es 9.