XXXI Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

BANCO DE PROBLEMAS

DÍA 1

NIVEL I

(7°)

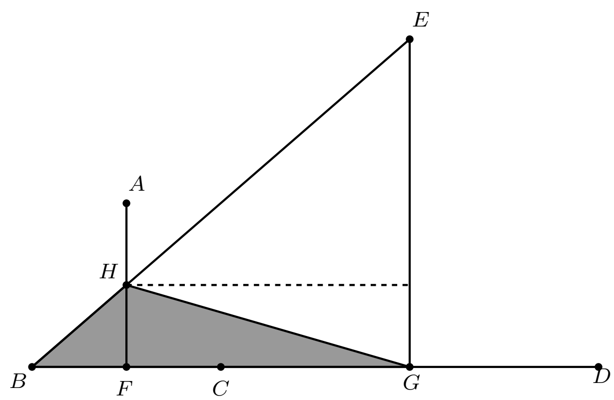
2019

GEOMETRÍA

1. Considere tres puntos colineales $B - C - D$ tales que $BC = 2$ y $CD = 4$. Sean F y G los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, A y E puntos tales que $\overline{AF} \perp \overline{BC}$, $\overline{EG} \perp \overline{CD}$ y $EG = 2\sqrt{3}$. Si H es el punto de intersección de $\overline{BE}$ y $\overleftrightarrow{AF}$ determine el área del $\triangle BGH$.

Solución

Considere la siguiente figura:



Para calcular el área del $\triangle HBG$ es necesario averiguar el área del $\triangle BEG$ y a ese valor se resta el área del $\triangle HEG$.

Observe que la distancia que hay entre H y $\overline{EG}$ es la misma que la que hay entre F y $\overline{EG}$.

Ahora se obtiene que el área sombreada está dada por:

$$A = \frac{BG \cdot EG}{2} - \frac{GE \cdot FG}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} - \frac{3 \cdot 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow A = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$$

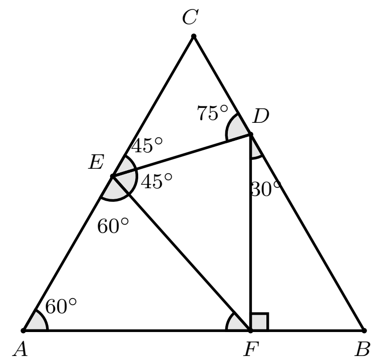
$$\Rightarrow A = \sqrt{3}$$

Que es el área que se desea encontrar.

2. Sea el $\triangle$ equilátero, sean F, D puntos en $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ respectivamente tal que $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ en F. Sea E un punto en $\overline{AC}$ tal que $\overline{ED}$ biseca a los ángulos $\angle CDF$ y $\angle CEF$. Determine $m\angle EFA$

Solución

Considere la figura

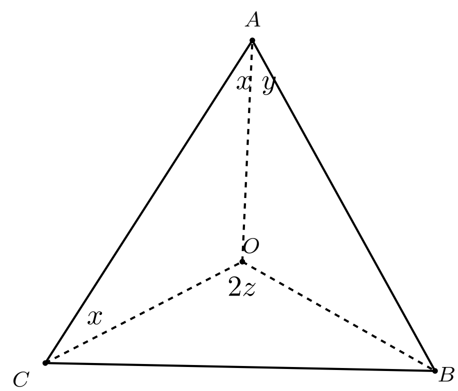


$m\angle DFB = 90°$ y $m\angle ABC = 60°$ entonces $m\angle FDB = 30°$.

Entocnes $m\angle CDF = 150°$ y así $m\angle CDE = 75°$ ($\overline{ED}$ biseca a $\angle CDF$), por suma de ángulos y como $m\angle ACB = 60°$ tenemos que $m\angle CED = 45°$ de donde $m\angle FED = 45°$ ($\overline{ED}$ biseca a $\angle CEF$) entonces $m\angle EFD = 60°$ y así $m\angle EFA = 30°$

3. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y sea O un punto en su interior tal que $OA = OB = OC$. Determine $\dfrac{m\angle CAB}{m\angle BOC}$

Solución



Sea $m\angle COB = 2z, m\angle ACO = x$ y $m\angle OBA = y$ Como $AO = OC$ podemos afirmar que $m\angle CAO = x$, y como $AO = OB$ podemos afirmar que $m\angle BAO = y$. Ademas vease que $m\angle COB + m\angle COA + m\angle AOB = 360°$. Como $m\angle COB = 2z$ entonces podemos afirmar que $m\angle COA + m\angle AOB = 360° - 2z$. Véase que ya tenemos definido por variables todos los ángulos del cuadrilátero $COBA$. Entonces podemos afirmar que $m\angle ACO + m\angle CAO + m\angle OAB + m\angle OBA + m\angle COA + m\angle AOB = 360°$

En otras palabras $2x + 2y + 360° - 2z = 360°$, es decir, $2x + 2y - 2z = 0$ de donde $x + y = z$ y $m\angle CAB = x + y$ por lo tanto $m\angle CAB = z$ Queriamos determinar $\dfrac{m\angle CAB}{m\angle BOC}$ eso es igual que $\dfrac{z}{2z}$, es decir, $\dfrac{1}{2}$.

Por lo tanto concluimos que $\dfrac{m\angle CAB}{m\angle BOC} = \dfrac{1}{2}$

TEORÍA DE NÚMEROS

1. Para cada entero positivo n se considera la suma de sus dígitos y este proceso se repite hasta que la suma sea un número de un dígito; denotamos por $s(n)$ a este último dígito. Por ejemplo, para 2019 se tiene que $2+0+1+9=12$, luego $1+2=3$ y así $s(2019)=3$.

   En el año 19 se realiza la edición 31 de OLCOMA y se tiene que $s(19)=1$ y $s(31)=4$ ambos son cuadrados perfectos. Determine todos los años X entre 1 y 99, inclusive, en los que, si en el año X se realiza la edición Y, entonces $s(X)$ y $s(Y)$ son ambos cuadrados perfectos.

   Solución

   Como en el año 19 se realiza la edición 31, entonces en el año 1 se realizó la edición 13 y por lo tanto en el año X se realiza la edición $X+12$.

   Sabemos que todo entero n y la suma de sus dígitos dejan el mismo residuo al dividirse por 9. Repitiendo el argumento obtenemos que $s(n)$ es el número entre $\{1,2,\ldots,9\}$ de manera que $n-s(n)$ es divisible entre 9. En particular, $s(n+9)=s(n)$ para $n\geq 1$. Por lo tanto, el problema se reduce a encontrar $1\leq n\leq 9$ tales que $s(n)=n$ y $s(n+12)=s(n+3)$ pertenezcan simultáneamente al conjunto $\{1,4,9\}$. Tenemos la siguiente tabla:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s(n+3)$	4	5	6	7	8	9	1	2	3

   Solamente $n=1$ lo satisface. Por lo tanto, los años X entre 1 y 99 que lo satisfacen son

$$\{1,10,19,28,37,46,55,64,73,82,91\}.$$

2. Determine la cantidad de números de 5 dígitos de la forma $abcab$, con a,b,c dígitos distintos, tales que $abcab-bacba$ sea divisible por 49

   Solución

$$\begin{aligned} m = abcab - bacba &= (a\cdot 10^4 + b\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + a\cdot 10 + b) - (b\cdot 10^4 + a\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a) \\ &= a(10^4 - 10^3 + 10 - 1) - b(10^4 - 10^3 + 10 - 1) \\ &= 9009(a-b) \\ &= 7\cdot 11\cdot 13\cdot 9(a-b), \end{aligned}$$

   Para que 49 divida a m se necesita que $a-b=7$ y c arbitrario. Los únicos números que lo cumplen son $a=9$ y $b=2$, $a=8$ y $b=1$, $a=7$ y $b=0$.

   I caso: Si $a=9$, $b=2$, entonces $c\in\{0,1,3,4,5,6,7,8\}$ para un total de 8 números.

II caso: Si $a = 8$ $b = 1$ entonces $c \in \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ para un total de 8 números.

III caso: Si $a = 7$, $b = 0$ entonces $c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ para un total de 8 números.

Así, la cantidad de números que cumplen lo indicado son 24.

RAZONAMIENTO LÓGICO

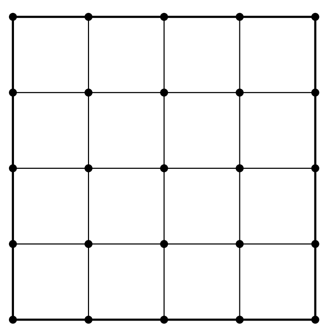
1. En la escuela de Santiago hicieron un torneo de futbol. El equipo de Santiago ya jugó tres partidos, en ellos metió cuatro goles y le metieron uno. Si por cada juego ganado les dan 3 puntos, por cada empate 1 punto y por cada partido perdido no les dan ningún punto, Determine todas las posibles sumas de puntos del equipo de Santiago en este momento.

   Solución

   El equipo de Santiago pudo haber perdido, cuando mucho, un partido. De ser así, ese partido tuvo que haber quedado $0-1$. En los otros dos partidos, el equipo metió cuatro goles, por lo que pudo haber ganado los dos partidos, en cuyo caso tendría 6 puntos o haber ganado uno $4-0$ y haber empatado el otro $0-0$, en cuyo caso tendría 4 puntos.

   Supongamos ahora que no perdieron ningún partido. Entonces, pudieron haber empatado dos y ganado uno (por ejemplo con marcadores $0-0$, $1-1$ y $3-0$), haber empatado uno y ganado dos (por ejemplo con marcadores $1-1$, $1-0$ y $2-0$) o haber ganado los tres (con marcadores $1-0$, $1-0$ y $2-1$). En el primer caso tendrían 5 puntos, en el segundo 7 puntos y en el tercero 9 puntos. Por lo tanto las sumas posibles de puntos son 4; 5; 6; 7 y 9.

2. Determine la cantidad total de cuadrados que se puede construir en una cuadrícula 4×4 como la que aparece en la siguiente figura, de modo que los vértices del cuadrado coincidan con alguno de los puntos de la cuadrícula.

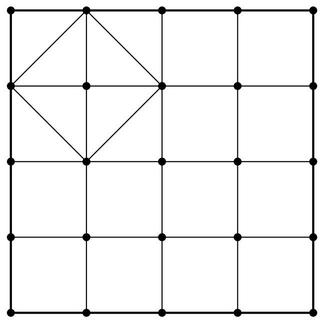
   

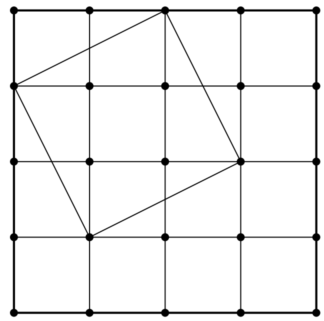
   Solución

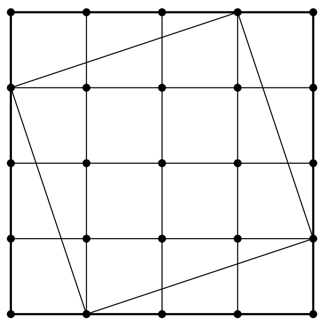
   Primero se cuenta los cuadrados con lados paralelos a la cuadrícula. De estos hay 16 de tamaño 1×1, 9 cuadrados de tamaño 2×2, 4 cuadrados 3×3 y 1 cuadrado 4×4. En total son

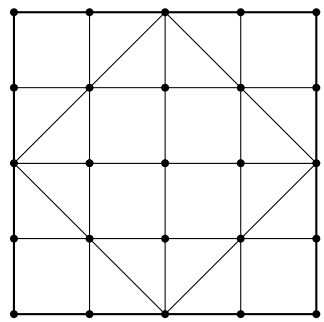
   $$16+9+4+1=30.$$

   Ahora se cuenta los cuadrados cuyos lados no son paralelos a los ejes. De estos hay de los siguientes tipos:


Tipo 1


Tipo 2


Tipo 3


Tipo 4

Del tipo 1 hay 9 cuadrados, del tipo 2 hay 8, que se obtienen al trasladar y rotar el de la figura, del tipo 3 hay 2, y finalmente, del tipo 4 hay 1. En total son

$$9 + 8 + 2 + 1 = 20.$$

Finalmente, hay

$$30 + 20 = 50$$

cuadrados.

3. En el tablero que se muestra a continuación, el número escrito en cada casilla es el número de monedas que hay en esa:

Columnas $\rightarrow$ Filas $\downarrow$	**1**	**2**	**3**	**4**
4	n	n	n	n
3	3	3	3	n
2	2	2	3	n
1	1	2	3	n

Adrián y Bob juegan en el tablero a elegir casillas no vacías (*con al menos una moneda*) y tomar todas las monedas que estén en dicha casillas, iniciando por Adrián que, en el primer turno, puede elegir la casillas que desee. Luego se tienen las siguientes reglas:

- Si en un turno se elegió la casillas (a, b), el que juega en el turno siguiente debe elegir una casillas (c, d) con $c \leq a$ y $d \leq b$.
- Si todas las casillas (c, d) que cumplen lo anterior no tienen monedas, el jugador de dicho turno puede elegir cualquier otra casilla no vacía.

El juego acaba cuando todas las casillas del tablero están vacías. Gana quien al finalizar tenga la mayor cantidad de monedas. Determine quién tiene asegurada la victoria y cuál es su estrategia ganadora para el caso en que $n = 2$ y para el caso en que $n = 4$

Nota: Las casillas (a, b) indica que está en la columna a y en la fila b; por ejemplo, la casilas $(1, 1)$ tiene 1 moneda, la casilla $(2, 1)$ tiene 2 monedas y la $(2, 4)$ tiene n monedas.

Solución

- Caso $n = 2$

Adrían inicia con $(2, 1)$ y Bob debe elegir $(1, 1)$. Después Adrián elige $(2, 2)$ ante lo que Bob toma $(1, 2)$. Luego Adrián toma $(2, 3)$ y Bob $(1, 3)$. En este punto del juego, Adrián solo debe elegir $(3, 2)$ y Bob deberá tomar $(3, 1)$. Aquí Adrián juega $(3, 3)$ y luego todos los demás turnos, cada jugador tomará dos monedas en cada turno así que Adrián luego puede jugar como sea y todo será equivalente.

Con esto, Adrián gana pues en sus turnos tuvo $2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2$ monedas, 19 en total, mientras que Bob tuvo $1, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2$ para un total de 17 monedas. Note que en cada jugada de Adrián se determina lo que deberá hacer Bob.

- Caso $n = 4$

En este caso, si Adrián elige iniciar con $(2, 1)$ entonces Bob solo puede elegir $(1, 1)$. Luego Adrián elige $(4, 1)$ y Bob debe tomar $(3, 1)$. Luego Adrián repite esto en la fila $2, 3, 4$ en ese orden con lo que se asegura que Adrián tomó $2, 4, 2, 4, 3, 4, 4$ y 4 monedas en sus turnos, mientras que Bob en sus turnos obtuvo $1, 3, 2, 3, 3, 3, 4$ y 4. Así Adrián gana con 27 monedas, pues Bob tiene solo 23 monedas. Note que en cada jugada de Adrián se determina lo que deberá hacer Bob.