XXXI Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

BANCO DE PROBLEMAS

ENUNCIADOS

DÍA 1

NIVEL I

(7°)

2019

GEOMETRÍA

1. Considere tres puntos colineales $B - C - D$ tales que $BC = 2$ y $CD = 4$. Sean F y G los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, A y E puntos tales que $\overline{AF} \perp \overline{BC}$, $\overline{EG} \perp \overline{CD}$ y $EG = 2\sqrt{3}$. Si H es el punto de intersección de $\overline{BE}$ y $\overleftrightarrow{AF}$ determine el área del $\triangle BGH$.

2. Sea el $\triangle$ equilátero, sean F, D puntos en $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ respectivamente tal que $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ en F. Sea E un punto en $\overline{AC}$ tal que $\overline{ED}$ biseca a los ángulos $\angle CDF$ y $\angle CEF$. Determine $m\angle EFA$

3. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y sea O un punto en su interior tal que $OA = OB = OC$. Determine $\dfrac{m\angle CAB}{m\angle BOC}$

TEORÍA DE NÚMEROS

1. Para cada entero positivo n se considera la suma de sus dígitos y este proceso se repite hasta que la suma sea un número de un dígito; denotamos por $s(n)$ a este último dígito. Por ejemplo, para 2019 se tiene que $2 + 0 + 1 + 9 = 12$, luego $1 + 2 = 3$ y así $s(2019) = 3$.

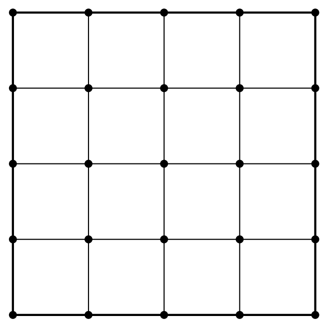
   En el año 19 se realiza la edición 31 de OLCOMA y se tiene que $s(19) = 1$ y $s(31) = 4$ ambos son cuadrados perfectos. Determine todos los años X entre 1 y 99, inclusive, en los que, si en el año X se realiza la edición Y, entonces $s(X)$ y $s(Y)$ son ambos cuadrados perfectos.

2. Determine la cantidad de números de 5 dígitos de la forma $abcab$, con a, b, c dígitos distintos, tales que $abcab - bacba$ sea divisible por 49

RAZONAMIENTO LÓGICO

1. En la escuela de Santiago hicieron un torneo de futbol. El equipo de Santiago ya jugó tres partidos, en ellos metió cuatro goles y le metieron uno. Si por cada juego ganado les dan 3 puntos, por cada empate 1 punto y por cada partido perdido no les dan ningún punto, Determine todas las posibles sumas de puntos del equipo de Santiago en este momento.

2. Determine la cantidad total de cuadrados que se puede construir en una cuadrícula 4×4 como la que aparece en la siguiente figura, de modo que los vértices del cuadrado coincidan con alguno de los puntos de la cuadrícula.



3. En el tablero que se muestra a continuación, el número escrito en cada casilla es el número de monedas que hay en esa:

Columnas $\rightarrow$ Filas $\downarrow$	**1**	**2**	**3**	**4**
4	n	n	n	n
3	3	3	3	n
2	2	2	3	n
1	1	2	3	n

Adrián y Bob juegan en el tablero a elegir casillas no vacías (*con al menos una moneda*) y tomar todas las monedas que estén en dicha casillas, iniciando por Adrián que, en el primer turno, puede elegir la casillas que desee. Luego se tienen las siguientes reglas:

- Si en un turno se eligió la casillas (a, b), el que juega en el turno siguiente debe elegir una casillas (c, d) con $c \leq a$ y $d \leq b$.
- Si todas las casillas (c, d) que cumplen lo anterior no tienen monedas, el jugador de dicho turno puede elegir cualquier otra casilla no vacía.

El juego acaba cuando todas las casillas del tablero están vacías. Gana quien al finalizar tenga la mayor cantidad de monedas. Determine quién tiene asegurada la victoria y cuál es su estrategia ganadora para el caso en que $n = 2$ y para el caso en que $n = 4$

Nota: Las casillas (a, b) indica que está en la columna a y en la fila b; por ejemplo, la casilas $(1, 1)$ tiene 1 moneda, la casilla $(2, 1)$ tiene 2 monedas y la $(2, 4)$ tiene n monedas.