XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT

BANCO DE PROBLEMAS

DÍA 1

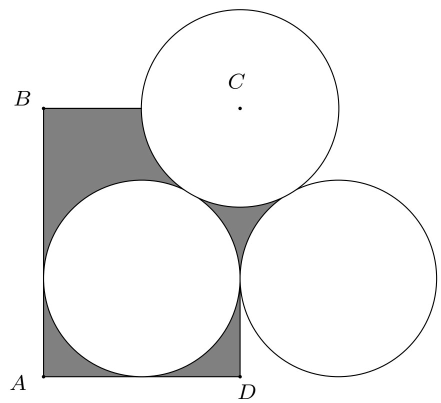
II Nivel

$8^\circ - 9^\circ$

Lunes 14 de noviembre del 2016

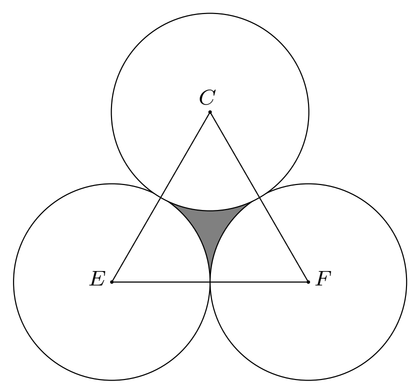
Geometría

1. En la figura adjunta los tres círculos son tangentes y tienen radio 2, $\square ABCD$ es un rectángulo con $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ tangentes al círculo y C es el centro de uno de los círculos. Determine el área de la región sombreada.



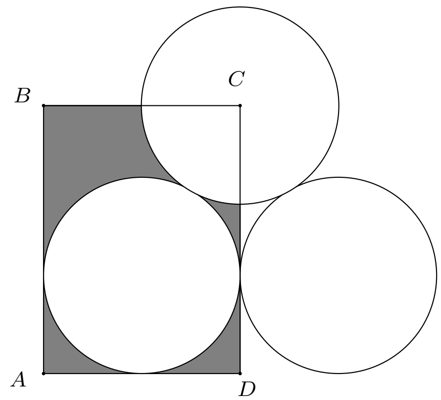
• Solución:

Calculemos primero el área de la región comprendida entre los tres círculos (A_1). Sean E, F los centros de los otros círculos.



$\triangle ECF$ es equilátero de lado 4, por lo que su altura es $2\sqrt{3}$ y su área es $A = 4\sqrt{3}$. El área sombreada corresponde al área del triángulo menos el área de tres sectores circulares, como el ángulo de cada uno de ellos es $60°$, entre los tres forman la mitad de un círculo, por lo que su área es $A_\circ = 2\pi$. Entonces el área sombreada es $A_1 = 4\sqrt{3} - 2\pi$

Consideremos ahora el área dentro del $\square ABCD$ y fuera de los círculos (A_2).

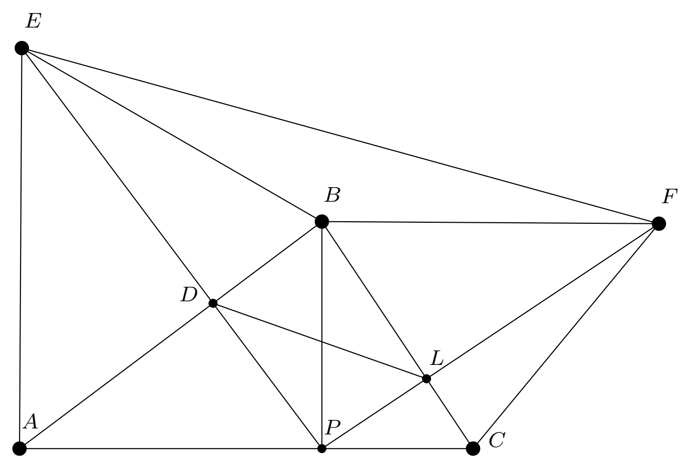


Observe que la medida de $\overline{DC}$ es la altura del $\triangle ECF$ más el radio del círculo, es decir, $DC = 2\sqrt{3} + 2$, además $AD = 4$, por lo que el $(ABCD) = 8\sqrt{3} + 8$. El área sombreada es el área del rectángulo menos el área de un círculo y menos la cuarta parte de otro círculo, es decir, $A_2 = 8\sqrt{3} + 8 - 5\pi$.

Finalmente se debe observar que A_2 incluye la mitad de A_1, por lo que el área sombreada total es $A_T = A_2 + \dfrac{1}{2}A_1 = 10\sqrt{3} + 8 - 6\pi$

2. Sea el $\triangle ABC$ recto en B. Sobre los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ se construyen exteriormente los triángulos equiláteros $\triangle ABE$ y $\triangle BCF$. Sean P el pie de la altura desde B al lado $\overline{AC}$, $D = \overleftrightarrow{PE} \cap \overleftrightarrow{AB}$ y $L = \overleftrightarrow{PF} \cap \overleftrightarrow{BC}$. Demuestre que $\overleftrightarrow{DL} \parallel \overleftrightarrow{EF}$.

- Solución:



Note que $\angle PCB = 90° - \angle CBP = \angle PBA$.

Como $\angle BPA = \angle CPB$, por $A - A$, $\triangle BPC \sim \triangle APC \Rightarrow \dfrac{BC}{PC} = \dfrac{AB}{PB} \Rightarrow \dfrac{CF}{PC} = \dfrac{EB}{PB}$ (por ser triángulos equiláteros).

Además, como $\angle PCB = \angle PBA \Rightarrow \angle PCF = \angle PCB + 60 = \angle PBE$.

Por LAL, $\triangle PCF \sim \triangle PBE$, por lo cual $\angle FPC = \angle EPB$ y $\angle CFD = \angle BEP$.

Esto uno a que $\angle PCL = \angle PBD$ y que $\angle LCF = \angle DBE$, implica que $\triangle PCL \sim \triangle PBD$ y $\triangle LCF \sim \triangle DBE$.

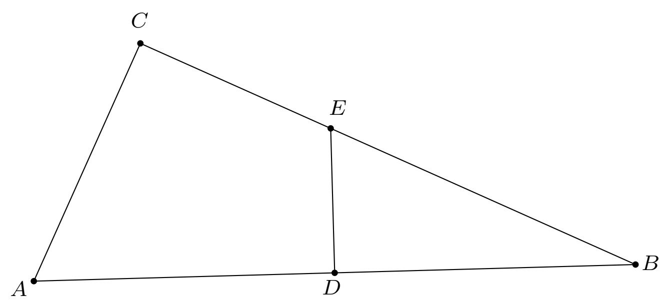
De donde $\dfrac{PL}{PD} = \dfrac{PC}{BP} = \dfrac{PF}{PE} \Rightarrow \overleftrightarrow{DL} \parallel \overleftrightarrow{EF}$.

Nota: Para la última igualdad se usó $\triangle PCL \sim \triangle PBD$ y $\triangle PCF \sim \triangle PBE$.

3. En la figura adjunta, el ΔABC es recto en C, $B-E-C$, $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ en D y D es el punto medio de $\overline{AB}$. Si $m = DB$ y $n = AC$,

   a) Compruebe que la razón entre las áreas de los triángulos ΔABC y ΔDBE está dada por $\dfrac{(ABC)}{(DBE)} = 4 - \dfrac{n^2}{m^2}$.

   b) Halle el área del $\square ADEC$ si $m = 10$ cm. y $n = 12$ cm.



• Solución:

En el ΔABC se tiene que $AC = n$ y $AB = AD + DB = 2 \cdot DB = 2m$. Con base en el Teorema de Pitágoras, el otro cateto de este triángulo tiene medida $BC = \sqrt{(2m)^2 - n^2} = \sqrt{4m^2 - n^2}$.

Por lo anterior, el área A_1 del ΔABC está dada por $A_1 = \dfrac{1}{2} n \sqrt{4m^2 - n^2} = \dfrac{n\sqrt{4m^2 - n^2}}{2}$.

Los triángulos ΔABC y ΔEBD son semejantes por criterio ángulo–ángulo–ángulo, ya que comparten el ángulo del vértice B, poseen ambos un ángulo recto, en los vértices C y D respectivamente, por lo que los restantes ángulos agudos son de igual medida (los ángulos de vértices A y E). Así,

$$\begin{aligned} \frac{ED}{AC} &= \frac{BD}{BC} \\ \Rightarrow \quad \frac{ED}{n} &= \frac{m}{\sqrt{4m^2 - n^2}} \\ \Rightarrow \quad ED &= \frac{n\,m}{\sqrt{4m^2 - n^2}} \end{aligned}$$

Con lo anterior, el área A_2 del ΔDBE está dada por $A_2 = \dfrac{1}{2} m \dfrac{n\,m}{\sqrt{4m^2 - n^2}} = \dfrac{n\,m^2}{2\sqrt{4m^2 - n^2}}$.

Por lo tanto, la razón R entre las áreas de los triángulos ΔABC y ΔDEB está dada por:

$$\begin{aligned} R &= \frac{A_1}{A_2} \\ &= \frac{\frac{n\sqrt{4m^2-n^2}}{2}}{\frac{n\,m^2}{2\sqrt{4m^2-n^2}}} \\ &= \frac{2n\left(4m^2-n^2\right)}{2n\,m^2} \\ &= \frac{4m^2-n^2}{m^2} \\ &= \frac{4m^2}{m^2}-\frac{n^2}{m^2} \\ &= 4-\frac{n^2}{m^2} \end{aligned}$$

El área del $\square ADEC$ está dada por:

$$\begin{aligned} (ADEC) &= (ABC)-(DBE) \\ &= \frac{12\sqrt{4\cdot 10^2-12^2}}{2}-\frac{12\cdot 10^2}{2\sqrt{4\cdot 10^2-12^2}} \\ &= 6\sqrt{4\cdot 100-144}-\frac{6\cdot 100}{\sqrt{4\cdot 100-144}} \\ &= 6\sqrt{256}-\frac{600}{\sqrt{256}} \\ &= 6\cdot 16-\frac{600}{16} \\ &= 96-\frac{75}{2} \\ &= \frac{192-75}{2}=\frac{117}{2} \end{aligned}$$

Así, el área del $\square ADEC$ es $\dfrac{117}{2}=58{,}5\ \text{cm}^2$.

Razonamiento Lógico

1. En el plano se encuentran 11 conjuntos de rectas, $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{11}$, de manera que en S_1 hay una recta, en S_2 hay dos rectas, en S_3 hay tres rectas y así sucesivamente, hasta que en S_{11} hay 11 rectas.

   Las rectas de cada uno de los 11 conjuntos son paralelas entre sí, pero no son paralelas a ninguna de las rectas de los demás conjuntos.

   Del total de rectas de estos 11 conjuntos que están en el plano, no hay tres rectas que pases por el mismo punto (ni tres ni más de tres rectas).

   Así, cada dos rectas no paralelas que se encuentran en el plano determinan un único punto de intersección.

   Calcule la cantidad de puntos de intersección que tiene la colección completa de rectas que se encuentran en el plano.

   • Solución:

   La estrategia es contar la cantidad de intersecciones de las rectas de cada conjunto S_i con las rectas de los conjuntos con menor cantidad de rectas.

   Así, se tiene lo siguiente:

   Las dos rectas del conjunto S_2 dan lugar a dos puntos (los de intersección de estas con la recta del conjunto S_1).

   Las tres rectas del conjunto S_3 dan lugar a nueve puntos (los tres puntos de intersección de estas con la recta del conjunto S_1 más seis puntos de intersección correspondientes con las dos rectas del conjunto S_2).

   Siguiendo con un análisis similar al anterior, se puede tabular la información de la manera siguiente:

$$\begin{array}{llll}
S_2 & 2 & = 2\,(1) & \\
S_3 & 9 & = 3\,(1+2) & \\
S_4 & 24 & = 4\,(1+2+3) & = 4 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{4^2 \cdot 3}{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
S_{10} & \ldots & = 10\,(1+2+3+\cdots+9) & = 10 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = \frac{10^2 \cdot 9}{2} \\
S_{11} & \ldots & = 11\,(1+2+3+\cdots+10) & = 11 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = \frac{11^2 \cdot 10}{2}
\end{array}$$

   Luego, la cantidad de puntos de intersección es

$$\begin{aligned}
& \frac{11^2 \cdot 10}{2} + \frac{10^2 \cdot 9}{2} + \cdots + \frac{4^2 \cdot 3}{2} + \frac{3^2 \cdot 2}{2} + \frac{2^2 \cdot 1}{2} \\
= \;& 121 \cdot 5 + 50 \cdot 9 + \cdots + 8 \cdot 3 + 9 + 2 \\
= \;& 605 + 450 + 324 + 224 + 147 + 90 + 50 + 24 + 9 + 2 \\
= \;& 1925
\end{aligned}$$

2. Sea n un entero positivo mayor que 1. Del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ se seleccionan al azar cuatro números distintos sin importar el orden en que se elijan. Por ejemplo, escoger los números 3, 1, 10 y 11 es lo mismo que elegir 11, 1, 3 y 10. ¿Cuál es la probabilidad que la suma de los cuatro números selecionados sea impar?

- Solución:

Primero se debe calcular la cantidad de combinaciones que producen efectivamente una suma impar. Esto se logrará con tres pares y un impar o bien tres impares y un par. Para el primer caso, los tres pares se pueden escoger de $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ formas, pues para la primera elección hay n posibilidades de número par, para la segunda hay $n-1$ (un par menos) y para la tercera $n-2$ (dos pares menos), pero no importa el orden en que se elijan, por lo que se dividirá entre $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneras. Para el segundo caso hay la misma cantidad de formas, usando el mismo razonamiento anterior pero con impares en vez de pares. Para los dos casos la cantidad de formas de seleccionar el par o impar restante es n.

Ahora, la cantidad de casos favorables es entonces $2 \cdot \dfrac{n \cdot n \cdot (n-1)(n-2)}{6} = \dfrac{n \cdot n(n-1)(n-2)}{3}$.

La cantidad de casos totales es $\dfrac{2n \cdot (2n-1)(2n-3)(2n-3)}{24}$ pues para escoger cuatro números, la primera elección se puede hacer de $2n$ maneras, la segunda de $2n-1$, la tercera $2n-3$, pero no importa el orden en que se elijan, por lo que se dividirá entre $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Para un total de $\dfrac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{24}$

Así, la probabilidad de que la suma de los números sea impar es

$$\frac{\dfrac{n \cdot n(n-1)(n-2)}{3}}{\dfrac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{24}} = \frac{2n(n-2)}{(2n-1)(2n-3)}$$

3. En una biblioteca hay libros y personas. Cada persona ha leído al menos un libro de la biblioteca, y ningún libro ha sido leído por todas las personas. Pruebe que hay dos libros L_1 y L_2, dos personas P_1 y P_2 de modo que P_1 ha leído a L_1 y P_2 ha leído a L_2, pero P_1 no ha leído a L_2 y P_2 no ha leído a L_1.

• Solución:

Sea L_1 el libro que han leído más personas (en caso de empate, tome cualquiera de los empatados).

Sea P_2 una de las personas que no ha leído a L_1 (existe por el enunciado).

Sea L_2 un libro que haya leído P_2.

Note que si todas las personas que han leído a L_1 también han leído a L_2, entonces se contradice la maximalidad de L_1.

Así, debe existir alguien que ha leído a L_1 pero no a L_2, llame a esa persona P_1.

Note que P_1 ha leído a L_1 y P_2 ha leído a L_2, pero P_1 no ha leído L_2 y P_2 no ha leído L_1, tal y como se quería.

4. Encuentre la suma de todas las fracciones positivas irreducibles menores que 1 cuyo denominador es 2016.

• Solución:

Nótese primero, que $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Por lo tanto, para que la fracción $n/2016$ sea irreducible, basta con que n sea primo relativo con 2, 3 y 7. Evidentemente, la suma de las fracciones en cuestión, es la suma de los numeradores, dividida por 2016 (el denominador común). Basta entonces encontrar la suma de todos los números que son divisibles por 2, 3 o 7 en dicho rango.

Ahora, si N divide a 2016, entonces la suma de todos los números divisibles por N menores o iguales a 2016 es

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2016}{N}+1\right)\frac{2016}{N}.$$

La siguiente tabla da los resultados de la sumas según criterios, entre 1 y 2016:

Todos los números	2 033 136
divisibles entre 2	508 536
divisibles entre 3	226 128
divisibles entre 7	41 416
divisibles entre 6	56 616
divisibles entre 14	10 440
divisibles entre 21	4656
divisibles entre 42	1176

La suma de los numeradores buscados sería

$$2\,033\,136 - (508\,536 + 226\,128 + 41\,416) + (56\,616 + 10\,440 + 4656) - 1176$$

$$2\,033\,136 - 776\,080 + 71\,712 - 1\,176 = 1\,328\,192$$

La suma de las fracciones buscadas es

$$\frac{1\,328\,192}{2016} = \frac{41\,506}{63} \approx 658{,}8254.$$

Teoría de Números

1. Un entero positivo se llama *olcontento* si al menos uno de sus múltiplos comienza con 2016. Por ejemplo, 39 es olcontento porque $39 \cdot 51715 = 2016885$. Encuentre todos los enteros positivos olcontentos.

   Solución:

   Sea n un entero positivo, y sea k la cantidad de dígitos de n.

   Note que $10^k > n$.

   Además, en el intervalo $[2016 \cdot 10^k, 2017 \cdot 10^k[$ hay 10^k números enteros, todos ellos comíenzan en 2016.

   Se sabe que en cualesquiera n o más enteros consecutivos siempre hay al menos uno divisible por n.

   Por lo cual n es olcontento implicando que todo entero positivo es olcontento.

2. Sean m y n dos números naturales, con $0 < m < n$, tales que los números enteros $\dfrac{2016^m}{32}$ y $\dfrac{2016^n}{32}$, en su representación decimal, tienen el último dígito igual. Encuentre el valor mínimo de $m + n$.

Solución:

Como los números tiene el mismo último dígito, su resta :

$$\frac{2016^n}{32} - \frac{2016^m}{32} = \frac{2016^m}{32}\left(2016^{n-m} - 1\right)$$

es divisible por 10. Pero como $2016^{n-m} - 1$ es impar eso implica que: 2 divide a $\dfrac{2016^m}{32}$ y 5 divide a $2016^{n-m} - 1$.

Esto significa que $\dfrac{2016^m}{32 \cdot 2} = \dfrac{2^{5m} \cdot 3^{2m} \cdot 7^m}{2^6}$ es entero, por tanto el mínimo valor de m es 2.

Como 2015 es divisible entre 5 y $\dfrac{2016^{n-m} - 1}{5}$ es entero, el mínimo valor de $n - m$ es 1, es decir $n = m + 1 = 3$. Por tanto $m + n = 5$ es mínimo.

3. Determine todas las parejas de números enteros m y n de tres dígitos, que satisfacen simultáneamente:

   a) Dos dígitos de m son iguales a los correspondientes dígitos de n, mientras que el otro dígito de m es una unidad menos que el correspondiente dígito de n (por ejemplo 263 y 273).

   b) Los números m y n son cuadrados perfectos.

   Solución:

   Como m es de tres dígitos, es de la forma $m = abc$, si n tiene dos dígitos y otro con una unidad más, entonces n tiene tres posibilidades, $n = ab(c+1)$ ó $n = a(b+1)c$ o $n = (a+1)bc$ por tanto:

   a) Si $n = ab(c+1)$ entonces entonces la diferencia entre n y m es de 1, pero las diferencias $(p+k)^2 - p^2 = k(2p+k) = 1$ solo es posible si $k = 1$ y $p = 0$ es decir 000 y 001 pero ellos no son números de tres dígitos.

   b) Si $n = a(b+1)c$ entonces entonces la diferencia entre n y m es de 10, pero las diferencias $(p+k)^2 - p^2 = k(2p+k) = 10$ no son posibles, ya que el menor cuadrado de tres dígitos es 100 en cuyo caso $p = 10$ y el factor $2p + k > 20$.

   c) Si $n = (a+1)bc$ entonces entonces la diferencia entre n y m es de 100, y diferencias $(p+k)^2 - p^2 = k(2p+k) = 100$, además como el factor $2p + k > 20$. Solo es posibles $100 = 2(48+2)$, por tanto $p = 24$ y $k = 2$ y los numeros serán 24 y 26, donde $26^2 - 24^2 = 676 - 576 = 100$.

   Por lo tanto, la única pareja de enteros que satisfacen las condiciones dadas es 676 y 576.