XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT

BANCO DE PROBLEMAS
DÍA 2

II Nivel

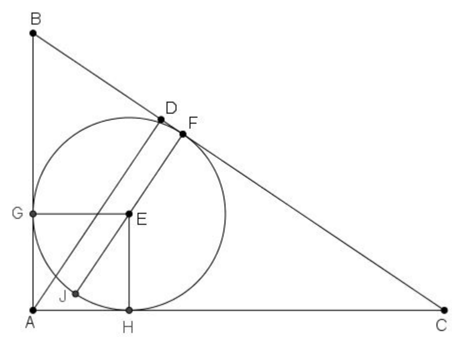
$8^\circ - 9^\circ$

Martes 15 de noviembre del 2016

Geometría

1. Demuestre que para todo triángulo rectángulo es válida la desigualdad $4 < \left(\frac{h}{r}\right)^2 < 6$, donde r es el radio de circunferencia inscrita y h es la altura sobre la hipotenusa.

• Solución:



Sea $AD = h$, $EF = r$, note que $AE = r\sqrt{2}$ y $h < AE + r$ por tanto $h < r(\sqrt{2} + 1)$. Por otra parte $2r < h$, con lo que se concluye que

$$2r < h < r(\sqrt{2} + 1)$$

$$\Rightarrow \quad 2 < \frac{h}{r} < \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow \quad 4 < \left(\frac{h}{r}\right)^2 < 3 + 2\sqrt{2} < 6$$

2. Sea $\square PQRS$ un cuadrado y sea A un punto cualquiera en el plano. Justifique por qué se satisface la relación $AP < AQ + AR + AS$.

   • Solución:

   Considere el ΔAPR.

   Aplicando la desigualdad triangular en dicho triángulo se tiene que $AP < AR + PR$.

   Ahora, considere el ΔAQS.

   Aplicando la desigualdad triangular en dicho triángulo se tiene que $SQ < AS + AQ$.

   Considerando las dos desigualdades anteriores, se tiene que $AP + SQ < AR + PR + AS + AQ$.

   Luego, dado que $SQ = PR$ (pues son las medidas de las diagonales del cuadrado) se tiene el resultado deseado $AP < AR + AS + AQ$.

Razonamiento Lógico

1. Se consideran diez números enteros, no necesariamente distintos, los cuales cumplen que al sumarse cualesquiera nueve de ellos se obtienen los siguientes resultados 82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 91 y 92. Determine los diez números.

- Solución:

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ los números enteros y s la suma.
Entonces , $s - a_1 = 82, s - a_2 = 83, s - a_3 = 84, s - a_4 = 85, s - a_5 = 87, s - a_6 = 89, s - a_7 = 90, s - a_8 = 91$ y $s - a_9 = 92$.

La diferencia $s - a_{10}$ será igual a uno de los anteriores resultados. De las ecuaciones anteriores se concluye que $a_1 = 1 + a_2, a_2 = 1 + a_3, a_3 = 1 + a_4, a_4 = 2 + a_5, a_5 = 2 + a_6$, $a_6 = 1 + a_7, a_7 = 1 + a_8$ y $a_8 = 1 + a_9$.

Sustituyendo sucesivamente de la última ecuación hasta la primera se obtiene $a_8 = 1 + a_9$, $a_7 = 2 + a_9,\ a_6 = 3 + a_9,\ a_5 = 5 + a_9,\ a_4 = 7 + a_9,\ a_3 = 8 + a_9,\ a_2 = 9 + a_9,\ a_1 = 10 + a_9$.

Además, $s - a_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 9a_9 + 45 = 9(a_9 + 5)$.

Como $s - a_{10}$ es igual a uno de los resultados, tenemos que $s - a_{10} = 90$ (puesto que por lo anterior es el único múltiplo de 9). Así $a_9 = 5$.

Luego, $a_7 = a_{10}$ pues $s - a_7 = 90$ y se sigue que $a_8 = 6, a_7 = 7,\ a_6 = 8,\ a_5 = 10,\ a_4 = 12$, $a_3 = 13,\ a_2 = 14,\ a_1 = 15$ y $a_{10} = 7$

Por lo tanto, los diez números enteros son: 15, 14, 13, 12, 10, 8, 7, 6, 5, 7.

2. En una galaxia muy lejana hay n Jedis (guardianes de la paz de la galaxia) sentados alrededor de una mesa, en forma de polígono regular. Sobre la mesa cada uno tiene un sable de luz con su nombre respectivo escrito en él. En un momento, un malvado Sith desordena los sables de luz, de manera tal que cada Jedi todavía tiene un sable de luz al frente, pero nadie tiene el que le pertenece. Por suerte uno de ellos rápidamente diseña un plan y descubre que si se gira la mesa hasta cierto punto, dos de los sables estarán al frente de sus respectivos dueños. Demuestre que este Jedi tiene razón.

- Solución:

Originalmente nadie tiene el sable que le corresponde, llámese "turno" a rotar la mesa una posición a favor de las manecillas del reloj; es decir, a cada Jedi se le asigna el sable del compañero de la derecha en cada turno.

Después de n turnos se vuelva al estado original. Entonces se tiene $n-1$ turnos distintos.

Si en cada turno cada Jedi aplaudieron en caso de tener su respectivo sable, entonces en estos $n-1$ turnos cada uno de los aplaudió exactamente una vez, ya que inicialmente nadie estaba con su sable correspondiente. Pero son n Jedis.

Por el principio de las Casillas, habrán al menos dos que aplaudan simultáneamente en al menos un turno. Y así, estos dos podrán vencer al malvado Sith.

3. Considere la sucesión a_n definida como:

   - $a_1 = a_2 = 1$;
   - $a_{n+2} = \dfrac{1}{a_{n+1}} + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Calcule a_{2016}

   Solución

   $a_{n+2} = \dfrac{1}{a_{n+1}} + a_n \Rightarrow (a_{n+1})(a_{n+2}) = 1 + a_n \cdot (a_{n+1})$

   - $n = 1 \Rightarrow a_2 \cdot a_3 = 1 + a_1 \cdot a_2 = 2$
   - $n = 2 \Rightarrow a_3 \cdot a_4 = 1 + a_2 \cdot a_3 = 3$
   - $n = 3 \Rightarrow a_4 \cdot a_5 = 1 + a_3 \cdot a_4 = 4$

   En general $(a_{n+1})(\cdot a_{n+2}) = n + 1$

   Así $(a_{n+1})(a_{n+2}) = 1 + a_n \cdot (a_{n+1}) \Rightarrow n + 1 = 1 + a_n \cdot (a_{n+1})$ Luego para $n \geq 3$ se tiene que $a_n = \dfrac{n}{a_{n+1}}$ y tomando n como $n-1$ se obtiene $a_n = \dfrac{n-1}{a_{n-1}}$.

   Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
a_{2016} &= \frac{2015}{a_{2015}} = \frac{2015 \cdot a_{2014}}{2014} = \frac{2015 \cdot 2013}{2014 \cdot a_{2013}} = \frac{2015 \cdot 2013 \cdot a_{2012}}{2014 \cdot 2012} = \frac{2015 \cdot 2013 \cdot 2011}{2014 \cdot 2012 \cdot a_{2011}} \\
&= \frac{2015 \cdot 2013 \cdot 2011 \cdot a_{2010}}{2014 \cdot 2012 \cdot 2010} = \frac{2015 \cdot 2013 \cdot 2011 \cdot 2009}{2014 \cdot 2012 \cdot 2010 \cdot a_{2009}} = \frac{2015 \cdot 2013 \cdot 2011 \cdot 2009 \cdot a_{2008}}{2014 \cdot 2012 \cdot 2010 \cdot 2008} \\
&= \ldots = \frac{2015 \cdot 2013 \cdot 2011 \cdot 2009 \cdot \ldots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2014 \cdot 2012 \cdot 2010 \cdot 2008 \ldots 4 \cdot 2} = \frac{2015!}{(2014 \cdot 2012 \cdot 2010 \cdot 2008 \ldots 4 \cdot 2)^2} \\
&= \ldots = \frac{2015!}{2^{2014} \cdot 1007!}
\end{aligned}
$$

$$\therefore a_{2016} = \frac{2015!}{2^{2014} \cdot 1007!}$$

Teoría de Números

1. Decimos que un número entero positivo es *desconectado* si todas sus cifras son iguales. Muestre que no existen números desconectados mayores que 10 que sean cuadrados perfectos.

   Solución:

   Suponga que $N = \underbrace{\overline{aaaa\cdots a}}_{k}$ es un número desconectado cuadrado perfecto, donde N está formado por k a's, con $k \geq 2$, $1 \leq a \leq 9$. Como todo cuadrado perfecto termina en 1, 4, 5, 6 o 9, entonces $a \neq 2$, $a \neq 3$, $a \neq 7$, $a \neq 8$.

   Si $a = 5$ entonces $5 \mid N$, pero $25 \nmid N$ (pues $25 \nmid 55$) y N no podría ser cuadrado perfecto.

   Si $a = 6$, entonces $2 \mid N$ pero $4 \nmid N$ (pues $4 \nmid 66$). Así que $a \neq 5$ y $a \neq 6$.

   Si $a = 1$ entonces $N + 1$ terminaría en 12, es decir, N deja residuo 3 al dividir entre 4. Pero también en el cuadrado de un número impar, es decir, $N = (2r + 1)^2$ para algún $r \in Z$. Así, $N = 4(r^2 + r) + 1$ entonces dejaría residuo 1 al dividir entre 4. Contradiciendo $a \neq 1$.
   Si $a = 4$ entonces $N = \overline{44\cdots 4} = 4 \cdot \overline{11\cdots 1}$, y al ser 4 cuadrado perfecto, $\overline{11\cdots 1}$ también debe serlo, pero ya se probó que esto no es posible.
   Si $a = 9$ se descarta con un procedimietno análogo. Por lo cual, $a \neq 4$ y $a \neq 9$ y por tanto a no puede ser ningún dígito entre 1 y 9, y así no existen números desconectados mayores a 10, que sean cuadrados perfectos.

2. Determine el residuo que queda al dividir al número $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2016^2$ entre 15.

Solución.
La suma de n cuadrados consecutivos viene dada por la fórmula $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Por tanto, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2016^2$ es igual a

$$\frac{2016 \cdot (2016 + 1) \cdot (2 \cdot 2016 + 1)}{6} = \frac{2016 \cdot 2017 \cdot 4033}{6} = 336 \cdot 2017 \cdot 4033$$

Dividiendo cada término entre 15 se tiene

$$(22 \cdot 15 + 6)(134 \cdot 15 + 7)(268 \cdot 15 + 13) = 15 \cdot C + 6 \cdot 7 \cdot 13 = 15 \cdot C + 546 = 15 \cdot (C + 36) + 6$$

donde $C = (22{\cdot}134{\cdot}268{\cdot}15^2{+}22{\cdot}134{\cdot}13{\cdot}15{+}22{\cdot}7{\cdot}268{\cdot}15{+}6{\cdot}134{\cdot}268{\cdot}25^2{+}6{\cdot}134{\cdot}13{\cdot}15{+}6{\cdot}7{\cdot}268{\cdot}15)$.
De aquí resulta claro que el residuo pedido es igual a 6.

Álgebra

1. Considere la ecuación $\dfrac{x\left(x-1\right)-\left(m+1\right)}{\left(x-1\right)\left(m-1\right)}=\dfrac{x}{m}$ en la que x representa la variable y m es una constante real. Determine, en caso de existir, todos los valores para m de manera que la ecuación tenga dos soluciones reales distintas.

Solución:

$$\begin{aligned}
&\frac{x\left(x-1\right)-\left(m+1\right)}{\left(x-1\right)\left(m-1\right)}=\frac{x}{m}\\
\Rightarrow\quad & m\left(x\left(x-1\right)-\left(m+1\right)\right)=x\left(x-1\right)\left(m-1\right)\\
\Rightarrow\quad & m\cdot x\left(x-1\right)-m\left(m+1\right)=m\cdot x\left(x-1\right)-x\left(x-1\right)\\
\Rightarrow\quad & -m\left(m+1\right)=-x\left(x-1\right)\\
\Rightarrow\quad & -m^2-m=-x^2-x\\
\Rightarrow\quad & x^2+x-m^2-m=0
\end{aligned}$$

Hay que notar que m no puede ser ni cero ni uno.

El discriminante de la ecuación $x^2+x-m^2-m=0$ está dado por $\Delta=1-4\left(-m^2-m\right)\Rightarrow \Delta=4m^2+4m+1$.

Para que la ecuación tenga dos soluciones reales distintas, se debe cumplir $\Delta>0$. Así,

$$\begin{aligned}
&\Delta>0\\
\Rightarrow\quad & 4m^2+4m+1>0\\
\Rightarrow\quad & \left(2m+1\right)^2>0
\end{aligned}$$

La inecuación anterior se satisface siempre que m no sea igual a $\dfrac{-1}{2}$.

Por lo tanto, para que la ecuación original tenga dos soluciones reales distintas, se debe cumplir $m\in\mathbb{R}-\left\{0,1,\dfrac{-1}{2}\right\}$.

2. Calcule los valores naturales de x que hacen entera la expresión $\dfrac{2x^2 - 9x^3}{x+6}$ de modo que $x+6$ sea impar.

- Solución:

Haciendo la división de polinomios se tiene que:

$$\frac{2x^2 - 9x^3}{x+6} = -9x^2 + 56x - 336 + \frac{2016}{x+6}$$

Como $x+6$ debe ser un divisor impar de $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ las opciones son de la forma $3^k \cdot 7^p$, es decir $1, 3, 7, 9, 21, 63$.

a) $x + 6 = 1$ entonces $x = -5$.

b) $x + 6 = 3$ entonces $x = -3$.

c) $x + 6 = 7$ entonces $x = 1$.

d) $x + 6 = 9$ entonces $x = 3$.

e) $x + 6 = 21$ entonces $x = 15$.

f) $x + 6 = 63$ entonces $x = 57$.

Por lo tanto, $x \in \{1, 3, 15, 57\}$

3. Verifique que si el polinomio $x^2 + ax + b + 1$ tiene raíces enteras positivas entonces $a^2 + b^2$ es un número compuesto.

Solución:
Sean r_1 y r_2 las raíces del polinomio dado.

Por las fórmulas de Vieta se tiene que
$(r_1 + r_2)^2 = a^2$ y $r_1 \cdot r_2 = b + 1 \Rightarrow (r_1 \cdot r_2 - 1)^2 = b^2$.
Luego,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 + r_1^2r_2^2 - 2r_1r_2 + 1 \\ &= r_1^2 + r_2^2 + r_1^2r_2^2 + 1 \\ &= (r_1^2 + 1)(r_2^2 + 1) \end{aligned}$$

El cual es un número compuesto para cualesquiera valores de r_1 y r_2.