XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

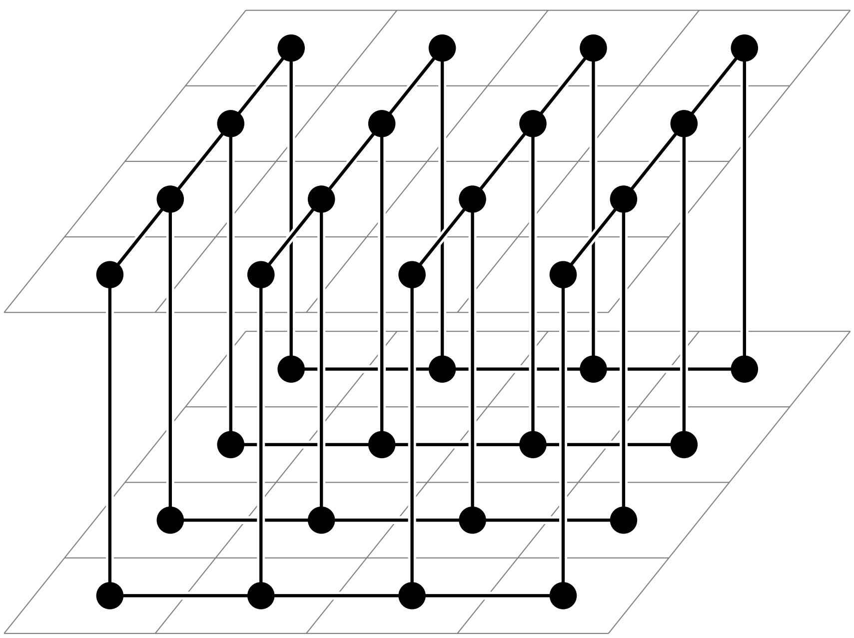
MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICAS

OLCOMA

DÍA 2 – SOLUCIONES

BANCO DE PROBLEMAS



Nivel II

$(8^\circ - 9^\circ)$

Martes 14 de noviembre – Final 2017

Ministerio de Educación Pública

UNA UNIVERSIDAD NACIONAL COSTA RICA

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA LUCEM ASPICIO

micitt MINISTERIO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA Y TELECOMUNICACIONES

UNED 40 aniversario

TEC Tecnológico de Costa Rica

ÁLGEBRA

1. Determine los valores de m de modo que el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ y^2 + (8-m)\,x^2 = 16 - m \end{cases}$$

tenga exactamente dos pares de soluciones (x, y).

Solución:

Despejando y de la primera se tiene que $y = 4 - x^2$, sustituyendo en la segunda se obtiene

$$\begin{aligned} y^2 + (8-m)x^2 - 16 + m = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (4-x^2)^2 + (8-m)x^2 - 16 + m = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^4 - 8x^2 + 16 + (8-m)x^2 - 16 + m = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^4 - mx^2 + m = 0 \end{aligned}$$

Sea $u = x^2$, entonces se obtiene la ecuación $u^2 - mu + m = 0$.

El discriminante es $\Delta = m^2 - 4m$, que es positivo si $m < 0$ o $m \geq 4$. Si $m < 0$ entonces las raíces son

$$u = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2}$$

En este caso, hay una raíz positiva y una negativa, luego, sustituyendo se tiene que

$$x^2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2}$$

es decir

$$x = \pm\sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2}},$$

y el sistema original tiene exactamente dos pares de soluciones.

Por otro lado, si $m \geq 4$ se tiene que las dos raíces son reales, pues es claro que

$$u = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2} > 0,$$

mientras que $m > \sqrt{m^2 - 4m}$ y entonces

$$u = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4m}}{2} > 0,$$

pues $m > \sqrt{m^2 - 4m}$. En este caso se obtiene cuatro pares de soluciones reales para el sistema original.

2. Sea m un número entero positivo, tal que la ecuación $m^2 - x\,(x+1) = 212$ posee dos soluciones enteras distintas. Determine todos los posibles valores de m.

   Solución:

   La ecuación $m^2 - x(x+1) = 212$ es equivalente a la ecuación cuadráctica $x^2 + x + (212 - m^2) = 0$.

   Las soluciones de la ecuación son de la forma $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{\triangle}}{2}$

   Se requiere que la ecuación posea dos soluciones enteras distintas.

   Por lo que, debe cumplirse que $\triangle > 0$, que $\triangle = u^2$ para algún u entero positivo y que $-1 \pm u$ sea par (es decir, que u sea impar).

   Debe cumplirse que $1 - 4(212 - m^2) = u^2$. Es decir, que $4m^2 - u^2 = 847$. De donde, se requiere que $(2m - u)(2m + u) = 7 \cdot 11^2$

   Se tienen tres posibilidades:

   1. $(2m - u) = 7 \cdot 11^2$ y $(2m + u) = 1$, de donde $m = 212$ y $u = 423$
   2. $(2m - u) = 7 \cdot 11$ y $(2m + u) = 11$, de donde $m = 22$ y $u = 33$
   3. $(2m - u) = 7$ y $(2m + u) = 11^2$, de donde $m = 32$ y $u = 57$

   Los valores admisibles para m son 212, 22 y 32.

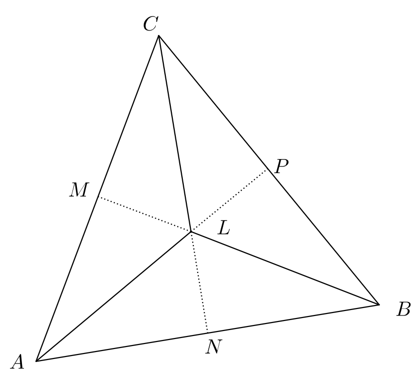
GEOMETRÍA

3. Sea L un punto en el interior de un $\triangle ABC$. Pruebe que

$$\frac{AB + BC + AC}{2} < LA + LB + LC < AB + BC + AC$$

   Solución:

   De acuerdo con la información dada, se obtiene la siguiente figura:



   Por el triángulo ALB y la desigualdad triangular se obtiene que $LA + LB > AB$. Análogamente, $LB + LC > BC$ y $LA + LC > AC$.

   La primera desigualdad se obtiene al sumar los respectivos lados de las tres desigualdades encontradas anteriormente. Es decir;

$$LA + LB + LB + LC + LA + LC > AB + BC + AC \Rightarrow \frac{AB + BC + AC}{2} < LA + LB + LC.$$

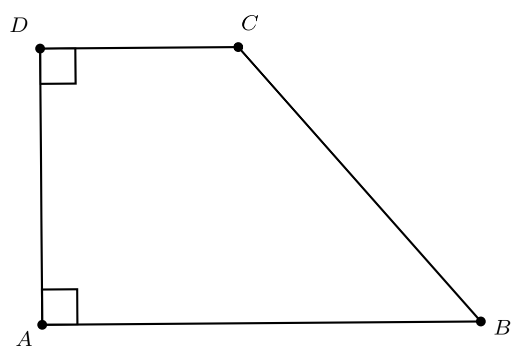
Para probar la segunda desigualdad ($LA + LB + LC < AB + BC + AC$), se prolonga el $\overline{BL}$ y se interseca con el $\overline{AC}$ en el punto M. Luego, $AB + AC = AB + AM + MC > BM + MC = LB + LM + MC > LB + LC \Rightarrow AB + AC > LB + LC$.

Análogamente, $AC + BC > LA + LB$ (al prolongar el $\overline{CL}$ y se interseca con el $\overline{AB}$ en el punto N) y $AB + BC > LA + LC$ (al prolongar el $\overline{AL}$ y se interseca con el $\overline{BC}$ en el punto P).

Se obtiene la segunda desigualdad, al sumar los respectivos lados de las tres desigualdades encontradas anteriormente. Es decir;

$AB + AC + AC + BC + AB + BC > LB + LC + LA + LB + LA + LC \Rightarrow LA + LB + LC < AB + BC + AC$.

4. El cuadrilátero $ABCD$ de la figura adjunta, es tal que sus lados tienen longitudes enteras y su área es 686 cm^2. Si $AD = 28$ cm. y $CB = AB$, determine el perímetro del cuadrilátero.



Solución:

Sean $CD = y$, $CB = AB = x$.

Considere el segmento CE perpendicular al segmento AB en E.
Se tiene que $AE = y$, $EB = x - y$.

Como $AD = 28$, se tiene que $CE = 28$.

Como el área del cuadrilátero mide 686, se tiene que $28y + \dfrac{28(x-y)}{2} = 686$. Luego, $y = 49 - x$.

Por otra parte, por el teorema de Pitágoras, se tiene que $28^2 + (x-y)^2 = x^2$, de donde $784 + (x - 49 + x)^2 = x^2$. Luego, $3x^2 - 196x + 3185 = 0$.

Se tiene que $x = 35$ o $x = \dfrac{91}{3}$.

Debido a que el cuadrilátero tiene lados de longitud entera, $x = 35$. Luego, $y = 14$.

Las longitudes de las medidas de los lados son 28, 14 y 35. Y el perímetro del cuadrilátero mide $28 + 14 + 2 \cdot 35 = 112$.

RAZONAMIENTO LÓGICO

5. Ana le propone a Pedro este problema: "Dado un número natural $n \geq 3$, considere las fracciones de la forma $\frac{2}{a \cdot b}$, donde a y b son números naturales y primos relativos que cumplen $a < b \leq n < a + b$ Determine la suma $S(n)$ de estas fracciones".

   Para resolver el problema, Pedro considera un valor de n particular y calcula la suma de las fracciones obteniendo $\frac{2015}{2017}$. Ana se da cuenta de que Pedro, por error, no consideró la fracción cuando $a = 1$. ¿Puede Ana deducir qué valor de n usó Pedro? Justifique.

   Solución:

   Ana se da cuenta del error de Pedro por que noto el patrón.

   Para $n = 3$ la suma es $S = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3} = 1$

   Para $n = 4$ la suma es $S = \frac{2}{1 \cdot 4} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} = 1$

   Esto se debe a que cuando pasamos de n a $n+1$ las fracciones donde $a+b = n+1$ (que cumplen las hipótesis para n) ya no cumplen las hipótesis para $n+1$. Es decir, se pierden las fracciones del tipo $\frac{2}{a(n+1-a)}$, pero se ganan dos nuevas fracciones $\frac{2}{a(n+1)} + \frac{2}{(n+1-a)(n+1)}$ ya que si a y $n+1$ son primos relativos entonces también lo son $n+1$ y $n+1-a$.

   Además se tiene que

   $$\frac{2}{a(n+1-a)} = \frac{2}{a(n+1)} + \frac{2}{(n+1-a)(n+1)}$$

   Por tanto la suma siempre es 1.

   Si Pedro no consideró la fracción cuando $a = 1$ y $b = n$ es decir, la fracción $\frac{2}{n}$ la suma sería.

   Para $n = 3$ la suma es $S = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

   Para $n = 4$ la suma es $S = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$

   Para $n = 5$ la suma es $S = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

   Por tanto para Pedro $S = \frac{n-2}{n} = \frac{2015}{2017}$, con lo cual $n = 2017$.

6. En una cuadrícula de 2017×2017 se tiene una ficha que se mueve con las reglas del caballo del ajedrez; es decir, dos casillas en forma horizontal y una vertical, o dos en forma vertical y una horizontal. Se coloca esta ficha en la esquina superior izquierda y en cada movimiento se quiere que *avance* hacia la esquina inferior derecha, es decir, que no pueda quedar en una casilla que esté más a la izquierda o más arriba de donde estaba anteriormente. Determine la cantidad de casillas hasta la que podría llegar siguiendo estas reglas.

   Solución:

   Numeremos las filas y columnas empezando por la casilla superior izquierda y llamemos (m, n) a la casilla que está en la fila m y columna n. Vemos que los únicos movimientos posibles a partir de la casilla inicial $(1,1)$ es a las casillas $(3,2)$ y $(2,3)$; a partir de estas dos posiciones, únicamente se puede mover a las casillas $(5,3)$, $(4,4)$ y $(3,5)$; a partir de estas tres posiciones únicamente se puede mover a las casillas $(7,4)$, $(6,5)$, $(5,6)$ y $(4,7)$. Observamos que la cantidad posible de casillas a las que se puede llegar aumenta en una unidad y corresponden a casillas en diagonal.

	1	2	3	4	5	6	7
1	●						
2			●				
3		●			●		
4				●			●
5			●			●	
6					●		
7				●			

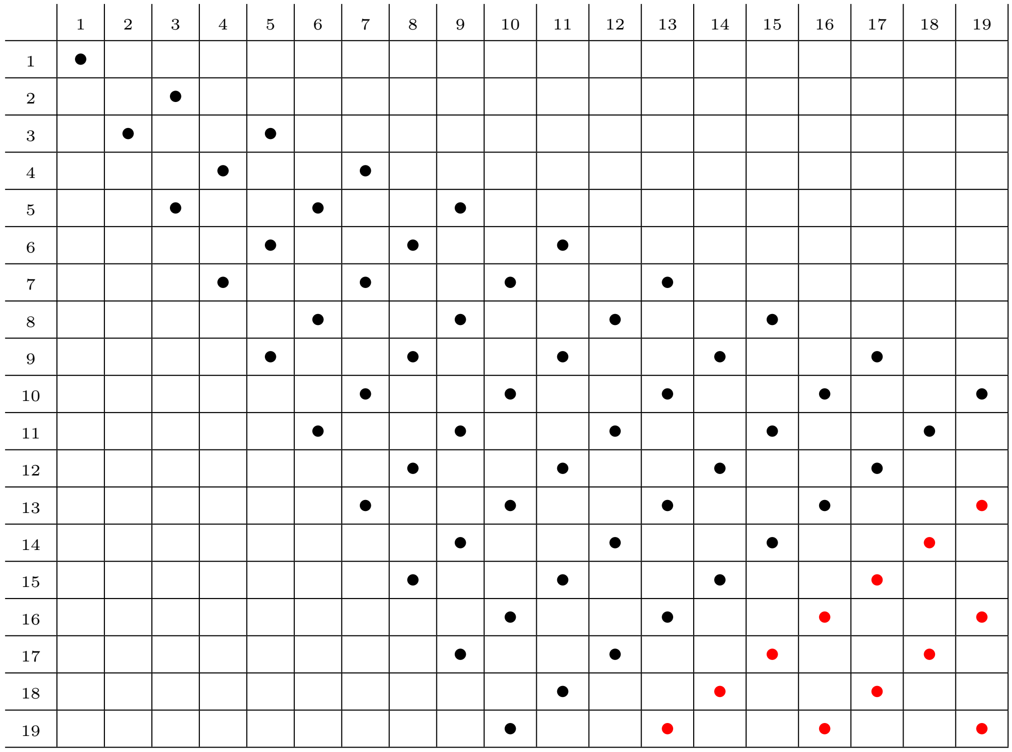
Si nos fijamos en la casilla que está más abajo de cada una de estas diagonales (hasta el momento son las casillas $(1,1)$, $(3,2)$, $(5,3)$ y $(7,4)$) , como a partir de la casilla anterior se baja dos unidades y se mueve a la derecha una unidad, se observa que todas estas casillas están en una fila impar m y en una columna que correspode a $\frac{m+1}{2}$, por lo que en la cuadrícula de 2017×2017 se llegará hasta la casilla $(2017, 1009)$.

Hasta esa casilla se tiene digonales *completas*, en el sentido que cada una tiene una casilla más que la anterior, por lo que hasta este momento se tienen $1+2+3+\cdots+1009 = \frac{1009 \cdot 1010}{2} = 1009 \cdot 505$ posibles casillas hasta las que se puede llegar.$(*)$

De ahí en adelante ya no son diagonales *completas*, por lo que se debe buscar otra forma de contar las casillas que faltan. Observemos que 2017 es impar y deja residuo 1 al dividirse por 3; esto es equivalente a decir que deja residuo 1 al dividirse por 6. Analicemos entonces lo que ocurre con números más pequeños con estas características: 7, 13, 19, 25.

	1	2	3	4	5	6	7
1	●						
2			●				
3		●			●		
4				●			●
5			●			●	
6					●		
7				●			●

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	●												
2			●										
3		●			●								
4				●			●						
5			●			●			●				
6					●			●			●		
7				●			●			●			●
8						●			●			●	
9					●			●			●		
10							●			●			●
11						●			●			●	
12								●			●		
13							●			●			●



Ordenemos lo que se observa de la siguiente manera:

7×7: $7 = 6 \cdot 1 + 1$, cantidad de casillas que no corresponden a diagonales *completas*: 1
13×13: $13 = 6 \cdot 2 + 1$, cantidad de casillas que no corresponden a diagonales *completas*: $1 + 4$
19×19: $13 = 6 \cdot 3 + 1$, cantidad de casillas que no corresponden a diagonales *completas*: $1 + 4 + 7$

En general se puede plantear que para una cuadrícula de tamaño $k \times k$, con $k = 6 \cdot n + 1$ la cantidad de casillas que no corresponden a diagonales *completas* es $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2)$. Como $2017 = 6 \cdot 336 + 1$, se tiene

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (1009) = \sum_{n=1}^{336} (3n - 2) = 3 \sum_{n=1}^{336} n - 2 \cdot 336 = 3 \cdot \frac{336 \cdot 337}{2} - 672 = 169176$$

Finalmente, por lo obtenido en $(*)$, la cantidad total de casillas a las que se puede llegar es

$$1009 \cdot 505 + 3 \cdot \frac{336 \cdot 337}{2} - 672 = 678721$$