XXXI Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

BANCO DE PROBLEMAS

DÍA 1

NIVEL II

(8° – 9°)

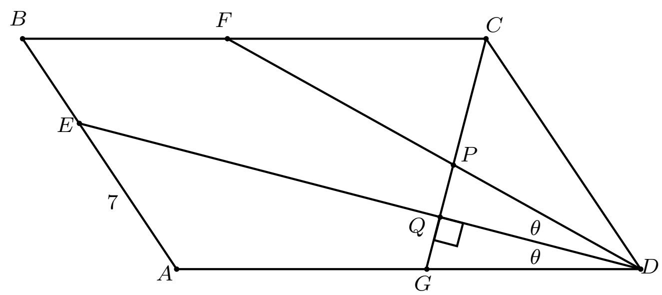
2019

GEOMETRÍA

1. Considere el paralelogramo $\square ABCD$. Sean E y F puntos, tales que $A-E-B$ y $B-F-C$, con $\overline{DE}$ bisectriz del $\angle ADF$ y $DF = AE + CF$. La línea recta que pasa por C y es perpendicular a $\overline{DE}$ interseca a $\overline{AD}$ en G. Si se tiene que $AE = 7$, determine DG.

Solución

Sean P y Q los puntos de intersección entre $\overline{CG}$ con $\overline{DF}$ y $\overline{DE}$, respectivamente, y sea $2\theta = m\angle ADF$.



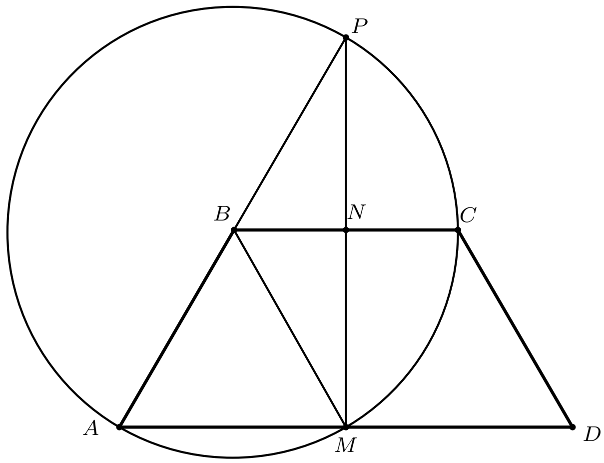
$\overline{DQ}$ es altura y bisectriz del $\triangle DPG$, por lo que $DP = DG$.

Dado que $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, se cumple que $m\angle CGD = m\angle FCG$ y $m\angle CFD = m\angle FDG = 2\theta$; además, $m\angle FPC = m\angle DPG$ por ser opuestos por el vértice. Así, los triángulos $\triangle PDG$ y $\triangle PFC$ son semejantes y esto implica que $FP = FC$.

Luego, $DF = AE + CF \Rightarrow AE = DF - CF = DF - PF = DP = DG = 7$.

2. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $AB = BC$. Sea M un punto en el segmento $\overline{AD}$ tal que $\overline{BM} \parallel \overline{CD}$ y sea N la intersección de $\overline{BC}$ con la perpendicular a $\overline{AD}$ que pasa por M. Si P es el punto de intersección de $\overline{AB}$ con $\overline{MN}$, demuestre que los puntos A,M,C y P están sobre la misma circunferencia.

   Solución



Como $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{BM} \parallel \overline{CD}$ entonces $\square BCDM$ es paralelogramo, por lo que $BM = CD$. Como $\square ABCD$ es un trapecio isósceles y $AB = BC$, se tiene que $AB = CD = BC$. Por esto: $BA = BM = BC$

Por lo anterior, el $\triangle ABM$ es isósceles, entonces $m\angle BAM = m\angle BMA$.

Como $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ entonces $m\angle BAM = m\angle PBN$ y $m\angle NBM = m\angle BMA$. Lo anterior implica que $m\angle PBN = m\angle MBN$, y como además $\overline{BN} \perp \overline{PM}$, entonces $m\angle BNP = m\angle BNM = 90°$.

Con esto, se tiene que los triángulos $\triangle PBN$ y $\triangle MBN$ tienen ángulos congruentes, además de que comparten el lado $\overline{BN}$, por lo que $\triangle PBN \cong \triangle MBN$. Entonces $PB = BM = BA = BC$

Por lo que A,M,C y P equidistan de B y por ende, están sobre la misma circunferencia.

RAZONAMIENTO LÓGICO

1. Una cuadrícula de 10×10 se llena con los números del 1 y al 100 de manera tal que al seleccionar el tercer número más grande de cada fila, la suma de todos estos sea la menor posible. Llame T al resultado de la suma de los terceros númreos más grandes de cada fila y S_n a la suma de los 10 números de la fila n. Determine la cantidad de filas en las que S_n es menor que T

Solución

										Suma de fila
1	2	3	4	5	6	7	**8**	?	?	36
9	10	11	12	13	14	15	**16**	?	?	100
17	18	19	20	21	22	23	**24**	?	?	164
25	26	27	28	29	30	31	**32**	?	?	228
33	34	35	36	37	38	39	**40**	?	?	292
41	42	43	44	45	46	47	**48**	?	?	356
49	50	51	52	53	54	55	**56**	?	?	420
57	58	59	60	61	62	63	**64**	?	?	484
65	66	67	68	69	70	71	**72**	?	?	548
73	74	75	76	77	78	79	**80**	?	?	612

Para que a tenga el menor valor posible es necesario que una fila contenga los números del 1 al 8, otra fila los números del 9 al 16 y el mismo patrón con las demás filas como se muestra en la figura. Además, en las últimas dos columnas se colocaran las números mayores.
Así $a = 8 + 16 + 24 + ... + 80 = 440$
Por su parte las filas que contienen al $56, 64, 72, 80, 40$ y al 48 tiene una suma mayor que 440, pues los valores mínimos que se pueden color en esas filas son 81 y 82, y en ese caso la suma de la fila es mayor que a.
Las filas que contiene al $8, 16, 24$ y 32 tiene una suma menor que a, pues inclusive colocando en alguna de ellas los valores más mas altos posibles que son 99 y 100 sus sumas no exceden a a.

2. Considere la cuadrícula de la figura adjunta. En cada una de las casillas se escribe un entero, de manera que la suma de los nueve números es 500. Se sabe, además, que los números de cualesquiera dos casillas vecinas difieren en una unidad (son vecinas dos casillas que tienen un lado en común). Determine el valor n de la casilla central.

	n	

Solución

En la figura adjunta se colocan los posibles valores para las restantes ocho casillas de la cuadrícula, siendo n el valor de la casilla central y respetando la diferencia indicada en el enunciado.

n $n \pm 2$	$n \pm 1$	n $n \pm 2$
$n \pm 1$	n	$n \pm 1$
n $n \pm 2$	$n \pm 1$	n $n \pm 2$

Si n es impar, se tendrían cinco casillas con números impartes (la central más las cuatro esquineras) y cuatro casillas con números pares cuya suma no podría ser 500 (pues esta suma no podría ser par).
Por lo anterior, necesariamente n tiene que ser par (se tendrían cinco casillas con números pares y cuatro casillas con números impartes -la suma de las nueve casillas sí podría ser 500).

La suma de las nueve casillas debe cumplir $9n \pm k = 500 \Rightarrow 9n = 500 \pm k$. Note que el valor de k es a lo sumo 12, por lo que se buscan los números n tales que $488 \leq 9n \leq 512$. Es decir, se busca un múltiplo de nueve que sea par en ese intervalo. El único valor que lo cumple es 504 y, as'ı, $504 = 9 \cdot 56 \Rightarrow n = 56$.

3. Daniela y Diego están jugando un juego con tres dados muy particulares, el primer dado tiene pintadas tres caras de color blanco y las otras tres caras de color naranja, el segundo dado tiene pintadas dos caras de color blanco y las otras cuatro caras de color naranja, y el tercer dado tiene todas las caras pintadas de color naranja.
   El juego consiste en que cada jugador debe elegir un dado (primero uno y luego el otro jugador) y lanzarlo al aire, si las caras superiores tienen el mismo color gana la persona que elige primero el dado, si son de diferente color gana el que eligió de segundo.
   Si Daniela elige primero y elige el dado que tiene tres caras de color blanco y las otras tres caras de color naranja, determine si es posible para Diego elegir un dado con el que tenga más posibilidades de ganar.

Solución

Primero se determina la probabilidad de que salgan caras con diferente color:

- Si Diego elige el dado con dos caras de color blanco y las otras cuatro caras de color naranja, la probabilidad de que gane está dada por $P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{2}$.
- Si Diego elige el dado con todas las caras de color naranja, la probabilidad de que gane está dada por $P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{2}$.

Como se puede observar, la probabiliadad para que Diego gane, sabiendo que Daniela tomó el dado con tres caras de color blanco y tres caras de color naranja, es la misma independientemente del dado que elija. Por lo tanto no se puede determinar con certeza.

ÁLGEBRA

1. Halle dos números reales positivos a y b tales que su suma $a+b$, su producto ab y la diferencia de sus cuadrados a^2-b^2 sean iguales.

Solución:

De $a+b=a^2-b^2$ se tiene $a+b=(a+b)(a-b)$ por lo que se deduce $1=a-b$ que es lo mismo $a=b+1$.
Sustituyendo este valor en la igualdad $ab=a+b$ resulta que:

$$(b+1)b=2b+1 \Rightarrow b^2+b=2b+1 \Rightarrow b^2+b-2b-1=0 \Rightarrow b^2-b-1=0$$

Por lo que la única raíz positiva de esta ecuación es $b=\dfrac{(1+\sqrt{5})}{2}$, de donde al sustituir en la igualdad $a=b+1$ se tiene:

$$a=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}+1 \Rightarrow a=\frac{(3+\sqrt{5})}{2}$$

Por otra parte, se puede sustituir $b=a-1$ en $ab=a+b$ para obtener que $a^2-3a+1=0$, que tiene raíces $a_1=\dfrac{(3+\sqrt{5})}{2}$ y $a_2=\dfrac{(3-\sqrt{5})}{2}$.
La primera $\dfrac{(3+\sqrt{5})}{2}$ da lugar a $b=\dfrac{(1+\sqrt{5})}{2}$, que es la solución hallada anteriormente, mientras que la segunda $a_2=\dfrac{(3-\sqrt{5})}{2}$ se descarta porque da un valor negativo para b.

2. Sean a y b dos números reales tales que $ab=5$ y $a(2b^2+3)-b(2a^2+3)=91$. Determine el valor de la expresión a^2+b^2.

Solución

Si se distribuye y luego se factoriza la parte izquierda de $a(2b^2+3)-b(2a^2+3)=91$ se obtiene

$$2ab^2+3a-2a^2b-3b=91$$

$$2ab(b-a)-3(b-a)=91$$

$$(b-a)(2ab-3)=91$$

Pero como $ab=5$ tenemos que $(b-a)(2\cdot 5-3)=91$ por lo que $b-a=13$.
Luego $a^2+b^2=a^2+b^2-2ab+2ab=(b-a)^2+2ab=13^2+2\cdot 5=179$