

XXXI Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

BANCO DE PROBLEMAS

ENUNCIADOS

DÍA 1



NIVEL II

(8° – 9°)

2019

GEOMETRÍA

1. Considere el paralelogramo $\square ABCD$. Sean E y F puntos, tales que $A - E - B$ y $B - F - C$, con \overline{DE} bisectriz del $\angle ADF$ y $DF = AE + CF$. La línea recta que pasa por C y es perpendicular a \overline{DE} interseca a \overline{AD} en G . Si se tiene que $AE = 7$, determine DG .
2. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $AB = BC$. Sea M un punto en el segmento \overline{AD} tal que $\overline{BM} \parallel \overline{CD}$ y sea N la intersección de \overline{BC} con la perpendicular a \overline{AD} que pasa por M . Si P es el punto de intersección de \overline{AB} con \overline{MN} , demuestre que los puntos A, M, C y P están sobre la misma circunferencia.

RAZONAMIENTO LÓGICO

1. Una cuadrícula de 10×10 se llena con los números del 1 y al 100 de manera tal que al seleccionar el tercer número más grande de cada fila, la suma de todos estos sea la menor posible. Llame T al resultado de la suma de los terceros números más grandes de cada fila y S_n a la suma de los 10 números de la fila n . Determine la cantidad de filas en las que S_n es menor que T
2. Considere la cuadrícula de la figura adjunta. En cada una de las casillas se escribe un entero, de manera que la suma de los nueve números es 500. Se sabe, además, que los números de cualesquiera dos casillas vecinas difieren en una unidad (son vecinas dos casillas que tienen un lado en común). Determine el valor n de la casilla central.

	n	

3. Daniela y Diego están jugando un juego con tres dados muy particulares, el primer dado tiene pintadas tres caras de color blanco y las otras tres caras de color naranja, el segundo dado tiene pintadas dos caras de color blanco y las otras cuatro caras de color naranja, y el tercer dado tiene todas las caras pintadas de color naranja.
El juego consiste en que cada jugador debe elegir un dado (primero uno y luego el otro jugador) y lanzarlo al aire, si las caras superiores tienen el mismo color gana la persona que elige primero el dado, si son de diferente color gana el que eligió de segundo.
Si Daniela elige primero y elige el dado que tiene tres caras de color blanco y las otras tres caras de color naranja, determine si es posible para Diego elegir un dado con el que tenga más posibilidades de ganar.

ÁLGEBRA

1. Halle dos números reales positivos a y b tales que su suma $a + b$, su producto ab y la diferencia de sus cuadrados $a^2 - b^2$ sean iguales.
2. Sean a y b dos números reales tales que $ab = 5$ y $a(2b^2 + 3) - b(2a^2 + 3) = 91$. Determine el valor de la expresión $a^2 + b^2$.