# XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

*UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT*

# BANCO DE PROBLEMAS
# DÍA 1

## III Nivel

## $10^\circ$ – $11^\circ$ – $12^\circ$

*Lunes 14 de noviembre del 2016*

# Geometría

1. Sea el $\Delta ABC$ isósceles con $AB = AC$. Sea $\omega$ su circunferencia circunscrita y $O$ su circuncentro. Considere $D$ la segunda intersección de $\overleftrightarrow{CO}$ con $\omega$. Tome un punto $E$ en $\overline{AB}$ tal que $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ y suponga que $AE : BE = 2 : 1$. Demuestre que el $\Delta ABC$ es equilátero.

   - Solución:

   Considere $H$ el pie de la altura de $A$ en $\overline{BC}$. Como $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, se tiene $m\angle ODE = m\angle OCA = m\angle OAC = m\angle OAB$, ya que $\overline{AO}$ también es bisectriz del $\angle BAC$. Por tanto, $\square ADEO$ es concíclico.

   Luego, como $\square ADBC$ es concíclico, se tiene que $m\angle AEO = m\angle ADO = m\angle ABC$. Es decir, $\overline{OE} \parallel \overline{HB}$. Por Thales,

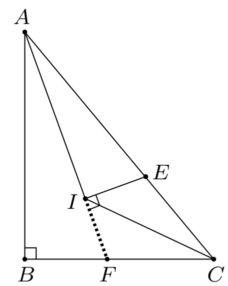
$$2 = \frac{AE}{EB} = \frac{AO}{OH} = \frac{AG}{GH}$$

   donde $G$ es el baricentro del $\Delta ABC$. Luego se ha demostrado $G = H$, por lo cual $\Delta ABC$ es equilátero, que era lo deseado.

2. Considere el $\triangle ABC$ recto en $B$, $F$ un punto tal que $B - F - C$ y $\overline{AF}$ biseca al $\angle BAC$, $I$ un punto tal que $A - I - F$ y $\overline{CI}$ biseca al $\angle ACB$, y $E$ un punto tal que $A - E - C$ y $\overline{AF} \perp \overline{EI}$. Si $AB = 4$ y $\dfrac{AI}{IF} = \dfrac{4}{3}$, determine $AE$.

• Solución:

Considere la figura




Sea $x = m\angle BAF = m\angle CAF$

$\angle IFC$ es externo al $\triangle BAF$ y entonces $m\angle IFC = 90° + x$.

$\angle IEC$ es externo al $\triangle IEA$ y entonces $m\angle IEC = 90° + x$.

Así tenemos que $\triangle ECI \cong \triangle FCI$ por $A - A - L$ y entonces $IE = IF$.

Por $A - A$ tenemos que $\triangle AIE \sim \triangle ABF$, y así

$$\frac{BF}{IE} = \frac{AB}{AI} \Rightarrow \frac{BF}{AB} = \frac{IE}{AI} \Rightarrow \frac{BF}{AB} = \frac{IF}{AI} \Rightarrow BF = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$$

Por Pitágoras en el $\triangle ABF$ tenemos que $AF = 5$.

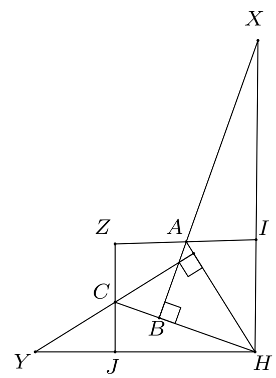
Tenemos que $AI + IF = 5 \Rightarrow \frac{4}{3}IF + IF = 5$ de donde $IF = \frac{15}{7}$ y $AI = \frac{20}{7}$

Aplicando Pitágoras en el $\triangle AIE$ se tiene que

$$AI^2 + IE^2 = AE^2 \Rightarrow AI^2 + IF^2 = AE^2 \Rightarrow AE = \frac{25}{7}$$

3. Sean el $\square JHIZ$ un rectángulo y $A$ y $C$ puntos en los lados $\overline{ZI}$ y $\overline{ZJ}$, respectivamente. La perpendicular desde $A$ sobre $\overline{CH}$ interseca a la $\overleftrightarrow{HI}$ en el punto $X$ y la perpendicular desde $C$ sobre $\overline{AH}$ interseca a la $\overleftrightarrow{HJ}$ en el punto $Y$. Demuestre que los puntos $X$, $Y$ y $Z$ son colineales.

   • Solución:




Sea $B$ el pie de la perpendicular desde $A$ sobre $\overline{CH}$. Observe que $\triangle XAI$ es recto en $I$, si $m\angle AXI = \alpha$, entonces $m\angle XAI = 90° - \alpha$.

También $\triangle XBH$ es recto en $B$ y $m\angle XHB = 90° - \alpha$.

Como $\angle H$ es recto, entonces $m\angle CHJ = \alpha$ y al ser $\triangle HCJ$ recto en $J$ se sigue que $m\angle HCJ = 90° - \alpha$.

Por lo anterior, se concluye que $m\angle XAI = m\angle XHB = m\angle XHC = m\angle HCJ$ y los triángulos $\triangle XAI$ y $\triangle HCJ$ son semejantes.

$\Rightarrow \dfrac{XI}{HJ} = \dfrac{AI}{CJ}$.

De forma análoga los triángulos $\triangle YCJ$ y $\triangle HAI$ son semejantes de donde $\dfrac{YJ}{HI} = \dfrac{CJ}{AI}$. Luego, $\dfrac{XI}{HJ} = \dfrac{HI}{YJ}$ y como $\square JHIZ$ es rectángulo $HJ = ZI$ y $HI = ZJ$.

Entonces $\dfrac{XI}{ZI} = \dfrac{ZJ}{YJ}$ y los triángulos $\triangle XZI$ y $\triangle ZYJ$ son semejantes y al ser rectos los ángulos $\angle XZI$ y $\angle YZJ$ son complementarios.

Finalmente, como $m\angle JZI = 90°$ se sigue que $m\angle YZX = m\angle XZI + m\angle JZI + m\angle YZJ = 180°$ y los putnos $X$, $Y$ y $Z$ con colinelales.

# Razonamiento Lógico

1. Con 21 fichas, unas blancas y otras negras, se forma un rectángulo de $3 \times 7$. Demostrar que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.

   • Solución:

   Se dispone el tablero en posición vertical, es decir, con 7 filas y 3 columnas.

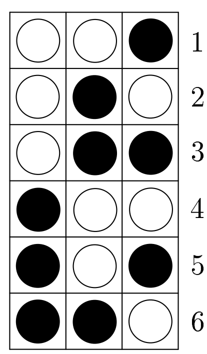
   Se asigna el color blanco a la cifra 0 y el negro a la cifra 1. De esta manera, cada fila representa un número escrito en base 2.

   En primer lugar, si en una fila se colocan todas las fichas del mismo color, por ejemplo el negro, necesariamente habrá un rectángulo ya que no se puede colocar en ninguna fila dos fichas negras y solo podemos llenar un máximo de 5 filas en total sin formar rectángulo.

   Por otra parte si dos números son iguales sus filas forman rectángulo, luego todas las filas han de representar números distintos.

   Por la consideración anterior hemos de excluir los números 000 y 111. Con tres cifras en base dos existen $2^3 = 8$ números distintos, quitando los anteriores quedan 6 para 7 filas por lo que necesariamente hemos de repetir y formar rectángulo.

   El problema tendría solución en un tablero de $3 \times 6$ tal como se muestra en la figura.



2. En el Olcotorneo de ajedrez hay 2016 participantes. Se sabe que en cualquier conjunto de cuatro participantes, hay uno de ellos que se enfrentó con los otros tres. Pruebe que hay al menos 2013 participantes que se enfrentaron a todos los demás.

• Solución:

Lema: Hay al menos un participante que enfrentó a todos los demás.

Proceda por contradicción, suponga que nadie se enfrentó a todos los otros participantes. Sean $A$ y $B$ dos personas cualesquiera. Si Existiese $C$ que se enfrentó a $A$ y $D$ que no se enfrentó a $B$, con $C$ distintos de $D$, entonces no se cumpliría la condición en el grupo $A$, $B$, $C$, $D$. Así pues, $C = D$. Sea $X$ cualquiera otra persona distinta de $A$, $B$, $C$. Entonces $A$ y $B$ se enfrentaron a $X$. Para que $A$, $B$, $C$ y $X$ cumplan la propiedad del enunciado, la única posibilidad es que haya sido $X$ quien se enfrentó a $A$, $B$ y $C$.

Ahora, como no existe nadie que enfrentó a todos, entonces hay un $Y$ que no se enfrentó con $X$. Sin embargo, este $Y$, al igual que $X$, se enfrentan a $A$, $B$ y $C$. Pero entonces el grupo $A$, $C$, $X$ y $Y$ no cumple las condiciones del problema.
Contradicción.

Así pues, existe una persona que se enfrentó a todos los demás.
Fin del Lema

Quítese entonces a esa persona a esa persona del grupo y aplique el mismo razonamiento a las restantes 2015 personas. Habrá alguien que se haya enfrentado a todos los demás, y también se enfrentó con el que se quitó. Luego, quítese a esa persona también y repítase el procedimiento con 2014 personas. Esto se puede repetir 2013 personas que se enfrentan a todos los demás. Ahí se debe parar pues en este caso final quedaron cuatro personas, una de las cuales se enfrentaron a todos los otros.

3. Considere una progresión aritmética compuesta por 100 términos. Si la suma de todos los términos de la progresión es 150 y la suma de los términos pares es 50, calcule la suma de los cuadrados de los 100 términos de la progresión.

• Solución:

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los términos de la sucesión. Dado que los términos forman una progresión aritmética, para $n \geq 2$ se cumple que $a_n = a_1 + (n-1)\,d$, donde $d$ es la diferencia entre dos términos consecutivos de la progresión.

Si la suma de los términos de la progresión es 150 entonces,

$$\begin{aligned}
150 &= \sum_{n=1}^{100} a_n \\
\Rightarrow\ 150 &= \sum_{n=1}^{100} [a_1 + (n-1)\,d] \\
\Rightarrow\ 150 &= 100a_1 + \sum_{n=1}^{100} (n-1)\,d \\
\Rightarrow\ 150 &= 100a_1 + d \cdot \sum_{n=1}^{100} (n-1) \\
\Rightarrow\ 150 &= 100a_1 + 4950d
\end{aligned}$$

Por otra parte, si la suma de los términos pares es 50 entonces,

$$\begin{aligned}
50 &= \sum_{n=1}^{50} a_{2n} \\
\Rightarrow\ 50 &= \sum_{n=1}^{50} [a_1 + (2n-1)\,d] \\
\Rightarrow\ 150 &= 50a_1 + d\left(2\sum_{n=1}^{50} n - 50\right) \\
\Rightarrow\ 150 &= 50a_1 + 2500d
\end{aligned}$$

Al resolver el sistema:

$$\begin{cases} 150 = 100a_1 + 4950d \\ 50 = 50a_1 + 2500d \end{cases}$$

Se obtiene $a_1 = 51$ y $d = -1$. Luego $a_n = 51 + (n-1) \cdot -2 = 53 - 2n$.

Por último,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{100} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{100} (53-2n)^2 \\
&= \sum_{n=1}^{100} \left(53^2 - 212n + 4n^2\right) \\
&= 53^2 \cdot 100 - 212 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} + 4 \cdot \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} \\
&= 563\,700
\end{aligned}$$

$\therefore$ La suma de los cuadrados de los 100 términos de la progresión aritmética es $563\,700$

# Teoría de Números

1. Halle todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $x - \left[\frac{x}{2016}\right] = 2016$, donde $[k]$ representa el mayor entero menor o igual a $k$.

   • Solución:

   Como $\left[\frac{x}{2016}\right] + 2016 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.
   Usando algoritmo de la división, sea $x = 2016 \cdot a + r$ con $0 \leq r < 2016$, $a, r \in \mathbb{Z}$.
   Entonces $2016 \cdot a + r - \left[a + \frac{r}{2016}\right] = 2016$.
   Al ser $0 \leq r < 2016$, esto implica que $\left[a + \frac{r}{2016}\right] = a$ pues $a \leq a + \frac{r}{2016} < a + 1$.
   Así, $2016a + r - a = 2016 \Rightarrow 2015a + r = 2016 \Rightarrow 0 \leq 2016 - 2015a < 2016$
   $\Rightarrow 0 < a \leq 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow x = 2017$ es la única solución.

2. Determine todos los números enteros positivos $a$ y $b$ para los que $a^4 + 4b^4$ sea un número primo.

• Solución:

Se procede a realizar lo siguiente:

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 \\ &= \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - 4a^2b^2 \\ &= \left(a^2 + 2b^2 + 2ab\right)\left(a^2 + 2b^2 - 2ab\right) \\ &= \left[(a+b)^2 + b^2\right]\left[(a-b)^2 + b^2\right] \end{aligned}$$

Se puede observar que $(a+b)^2 + b^2 > 1$, $a^4 + 4b^4$ puede ser un número primo solo si $(a-b)^2 + b^2 = 1$.

La igualdad anterior se cumple si $a = b = 1$.

Por lo tanto, $a$ y $b$ tienen el mismo número entero positivo y es único.

3. Encuentre todos los enteros no negativos $a$ y $b$ que satisfacen la ecuación $3 \cdot 2^a + 1 = b^2$.

• Solución:

$3 \cdot 2^a = b^2 - 1 \Rightarrow 3 \cdot 2^a = (b-1)(b+1)$
Por el teorema fundamental de la aritmética se obtienen los siguientes tres casos

1) $b - 1 = 1$ y $b + 1 = 3 \cdot 2^a$ (pues $b - 1 < b + 1$)
$\Rightarrow b = 2$ y $2 + 1 = 3 \cdot 2^a \Rightarrow 2^a = 1 \Rightarrow a = 0$

2) $b - 1 = 2^\alpha$ y $b + 1 = 3 \cdot 2^\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \alpha, \beta > 0$.
Restando las ecuaciones $2 = 3 \cdot 2^\beta - 2^\alpha \Rightarrow 3 \cdot 2^{\beta-1} - 2^{\alpha-1} = 1$

    1) $\alpha = 1$ entonces $3 \cdot 2^{\beta-1} = 2$ y no es posible.
    2) $\alpha = 2$ entonces $3 \cdot 2^{\beta-1} = 3 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow a = 3$ y $b = 5$
    3) $\alpha > 2$ no es posible para ningún $\beta$ (pues si $\beta = 1$ entonces $3 - 2^{\alpha-1} < 1$ y si $\beta > 1$ entonces $3 \cdot 2^{\beta-1} - 2^{\alpha-1}$ es par)

3) $b - 1 = 3 \cdot 2^\alpha$ y $b + 1 = 2^\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \alpha, \beta > 0$.
Restando las ecuaciones $2 = 2^\beta - 3 \cdot 2^\alpha \Rightarrow 2^{\beta-1} - 3 \cdot 2^{\alpha-1} = 1$

    1) $\alpha = 1$ entonces $2^{\beta-1} = 4 \Rightarrow \beta = 3 \Rightarrow a = 4$ y $b = 7$.
    2) $\alpha = 2$ entonces $2^{\beta-1} = 7$ y no es posible.
    3) $\alpha > 2$ no es posible para ningún valor de $\beta$ (pues si $\beta = 1, 3 - 2^{\alpha-1} < 1$ y si $\beta > 1$ entonces $2^{\beta-1} - 3 \cdot 2^{\alpha-1}$ es par).
    Por lo tanto, solo satisfacen $(a, b) \in \{(0, 2), (3, 5), (4, 7)\}$

# Álgebra

1. Compruebe que
$$\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2016}}\right)^2\left(2017+24\sqrt{14}\right)=2015^2$$
• Solución:

Observemos que
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1}=\sqrt{2}-1$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$
En general
$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{-1}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

Entonces $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2016}}$

$$=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{2015}-\sqrt{2014}\right)+\left(\sqrt{2016}-\sqrt{2015}\right)$$

$$=\sqrt{2016}-1$$

Luego
$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2016}}\right)^2\left(2017+24\sqrt{14}\right) &= \left(\sqrt{2016}-1\right)^2\left(2017+24\sqrt{14}\right)\\
&= \left(2016-2\sqrt{2016}+1\right)\left(2017+24\sqrt{14}\right)\\
&= \left(2017-2\sqrt{2016}\right)\left(2017+2\cdot 12\sqrt{14}\right)\\
&= \left(2017-2\sqrt{2016}\right)\left(2017+2\sqrt{2016}\right)\\
&= 2017^2-4\cdot 2016\\
&= (2016+1)^2-4\cdot 2016\\
&= 2016^2+2\cdot 2016+1-4\cdot 2016\\
&= 2016^2-2\cdot 2016+1\\
&= (2016-1)^2\\
&= 2015^2
\end{aligned}$$

2. Halle todas las soluciones enteras de la ecuación $p\,(x+y)=xy$, siendo $p$ un número primo.

• Solución:

Ya que $p$ es primo, $p \neq 0$ y $p \neq 1$. De la ecuación resulta que $p$ divide a $x$ o $p$ divide a $y$. Como la ecuación es simétrica respecto de $x$ e $y$, si $(\alpha, \beta)$ es solución, también lo será $(\beta, \alpha)$. Si $p$ divide a $x$, $x = pa$, $(a \in Z)$ la ecuación se puede escribir como:

$$p(pa+y) = pay \Rightarrow pa + y = ay \Rightarrow y = \frac{pa}{a-1}$$

ya que $a$ es entero, además $a$ y $(a-1)$ son primos entre sí, luego $(a-1)$ divide a $p$. Al ser $p$ primo solo hay cuatro posibilidades: $a-1=\pm 1$ y $a-1=\pm p$.

Estudiando todos los casos.

*a*) $a-1=-1$, entonces $a=0$, $x=0$, $y=0$

*b*) $a-1=1$, entonces $a=2$, $x=2p \Rightarrow y = \dfrac{2p}{2-1} = 2p$.

*c*) $a-1=p$, entonces $a=p+1$, $x=p(p+1) \Rightarrow y = \dfrac{p(p+1)}{p+1-1} = p+1$

*d*) $a-1=-p$, entonces $a=1-p$, $x=p(1-p) \Rightarrow y = \dfrac{p(1-p)}{1-p-1} = p-1$

En resumen las soluciones son: $(0,0)$; $(2p,2p)$; $(p(p+1),p+1)$; $(p(1-p),p-1)$; y por la simetría se agrega $(p+1,p(p+1))$; $(p-1,p(1-p))$.

3. Sean $x$ y $y$ dos números reales positivos, tales que $x + y = 1$.

   Demuestre que $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$.

   • Solución:

   Homogeneizando la expresión se tiene $(x+1)(y+1) \geq 9xy$. Ya que $x+y = 1$, lo anterior equivale a $(2x + y)(2y + x) \geq 9xy$. Expandiendo y simplificando se tiene

$$2x^2 + 2y^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

   lo cual es claramente verdadero.

   *Nota:* Se puede aumentar la dificultad del problema si se pide determinar el mínimo de $(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y})$ en vez de decir que el mínimo es 9.