XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT

BANCO DE PROBLEMAS
DÍA 2

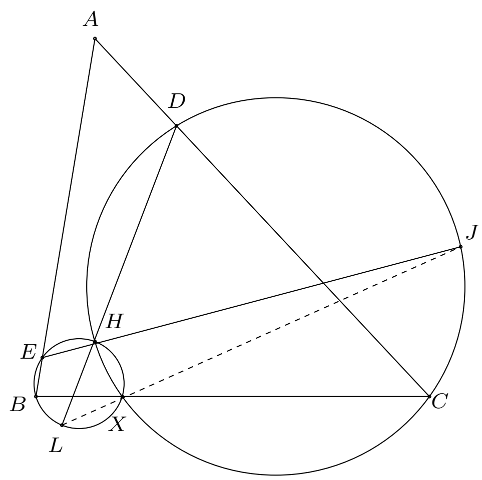
III Nivel
10° – 11° – 12°

Martes 15 de noviembre del 2016

Geometría

1. Sea $\triangle ABC$ acutángulo con ortocentro H. Sea X un punto de $\overline{BC}$, tal que $B-X-C$. Sea Γ la circunferencia circunscrita del $\triangle BHX$ y Γ_2 la circunferencia circunscrita del ΔCHX. Sea E la intersección de $\overline{AB}$ con Γ, y D la intersección de $\overline{AC}$ con Γ_2. Sea L la intersección de $\overleftrightarrow{HD}$ con Γ y J la intersección de $\overleftrightarrow{EH}$ con Γ_2. Muestre que L, X y J son colineales.

   - Solución:



Note que $m\angle HLX = m\angle HBX$ (inscritos a $\widehat{HX}$) $= m\angle HBC = 90° - m\angle C$.

Además, $m\angle LHX = 180° - m\angle DHX = m\angle C$ ($DHXC$ cíclico).

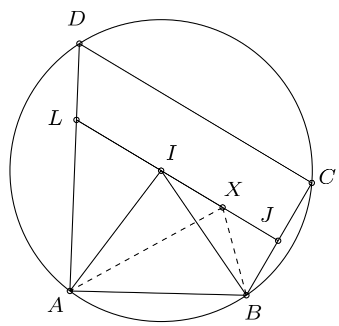
Así que $m\angle HXL = 180° - m\angle HLX - m\angle LHX = 180° - (90° - m\angle C) - m\angle C = 90°$.

Análogamente $m\angle HXJ$ también es $90°$. Así, $m\angle LXJ = 90° + 90° = 180°$.

Y por tanto $L - X - J$.

2. Sea $\square ABCD$ convexo, tal que A, B, C y D están sobre una circunferencia, con $\angle DAB < \angle ABC$. Sea I la intersección de la bisectriz del $\angle ABC$ con la bisectriz del $\angle BAD$. Sea l la paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ que pasa por I. Suponga que l corta a los segmentos $\overline{DA}$ y $\overline{BC}$ en L y J, respectivamente. Demuestre que $\overline{AL} + \overline{JB} = \overline{LJ}$

   - Solución:



Sea X sobre $\overline{LJ}$ tal que $\overline{AL} = \overline{LX}$.

Sea $\angle DAB = \angle A, \angle ABC = \angle B$. Como $\square ADCB$ es concíclico, $m\angle ADC = 180° - m\angle B$, $m\angle DCB = 180° - m\angle A$.

Al ser $\overleftrightarrow{LJ} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, se cumple que $m\angle ALJ = 180° - m\angle B$.

Como $\overline{LX} = \overline{AL}$, $m\angle LAX = m\angle LXA = \dfrac{m\angle B}{2}$.

Pero $m\angle IBA = \dfrac{m\angle B}{2}$. Entonces $m\angle IXA = m\angle IBA$, por lo cual $\square IXBA$ es concíclico.

Por otro lado, $m\angle LJB = 180° - m\angle A$.

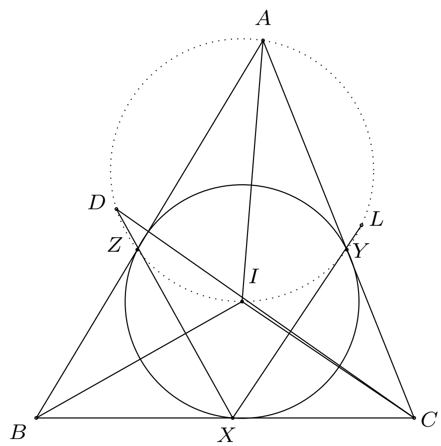
Además, $\text{m}\angle JXB = 180° - m\angle IXB = m\angle IAB = \dfrac{m\angle A}{2}$ ($\square AIXB$ concíclico)

$\Rightarrow m\angle XBJ = 180° - (180° - m\angle A) - \dfrac{m\angle A}{2} = \dfrac{m\angle A}{2} = m\angle JXB$.

$\Rightarrow \overline{XJ} = \overline{JB} \Rightarrow AL + JB = LX + XJ = LJ$.

3. Sea $\triangle ABC$ acutángulo, con incírculo Γ e incentro I. Γ toca a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en Z, X y Y, respectivamente. Sea D la intersección de $\overleftrightarrow{XZ}$ con $\overleftrightarrow{CI}$ y L la intersección de $\overleftrightarrow{BI}$ con $\overleftrightarrow{XY}$. Suponga que D y L están afuera del $\triangle ABC$. Pruebe que A, D, Z, I, Y y L están sobre una circunferencia.

   • Solución:



Primero, al ser $\overleftrightarrow{AY}$ y $\overleftrightarrow{AZ}$ tangentes a Γ, $\angle AYI$ y $\angle AZI$ son rectos. Su suma será $180°$, por lo cual $\square AZIY$ es cíclico.

Ahora, como $CX = CY$, $m\angle CXY = m\angle CYX = 90° - \dfrac{m\angle ACB}{2}$

$\Rightarrow m\angle ILY = m\angle BLX = 180° - m\angle LBX - m\angle LXB$

$= 180° - \dfrac{m\angle ABC}{2} - (180° - m\angle YXC) = m\angle YXC - \dfrac{m\angle ABC}{2} = 90° - \dfrac{m\angle ACB}{2} - \dfrac{m\angle ABC}{2} = \dfrac{m\angle BAC}{2}$.

Como $m\angle IAY$ también es $\dfrac{m\angle BAC}{2}$, entonces $m\angle ILY = m\angle IAY \Rightarrow \square IYLA$ cíclico.

Análogamente, $\square ADZI$ es cíclico también. Así, Sobre el circuncírculo de $\angle AIY$ está el punto Z y L. Pero este círculo también pasa por D. De donde A, D, Z, I, Y y L están sobre una circunferencia.

Comentario: no es necesario la condición de que D y L estén fuera del triángulo, pero es más sencillo ponerla, para evitar varios casos.

Teoría de Números

1. Sea $p > 5$ un primo tal que ninguna de sus cifras es divisible por 3 ni por 7. Pruebe que la ecuación $x^4 + p = 3y^4$ no tiene soluciones enteras.

   • Solución:

   La última cifra de p no puede ser par pues $2 \nmid p$.

   Tampoco puede ser 5 pues $5 \nmid p$.

   Tampoco puede ser 3, 6, 9 o 7 pues se incumpliríaa ental caso el enunciado.

   Por lo que la última cifra de p es 1.

   Ahora, un número puede dejar residuo 0, 1, 2, 3 o 4 al dividir entre 5. Al elevar al cuadrado dejará residuo 0, 1, 4, 4 o 1 respectivamente. Al elevarlo a la 4 dejará residuo 0, 1, 1, 1, 1 respectivamente al dividir entre 5.

   Las únicas opciones para el residuo de x^4 al dividir entre 5 serán entonces 0 o 1 y las únicas opciones de $3y^4$ serán 0 o 3.

   Pero p deja residuo 1 al dividir entre 5, por lo que $x^4 + p$ deja residuo 1 o 2.

   Sin embargo esto representa una contradicción ya que ambos lados de la ecuación deberán dejar el mismo residuo y no se podrá dado que los conjuntos $\{0, 3\}$ y $\{1, 2\}$ son disjuntos.

2. Sean x, y, z enteros positivos y p un primo tales que $x < y < z < p$. Además x^3, y^3, z^3 dejan el mismo residuo al dividir entre p. Pruebe que $x + y + z$ divide a $x^2 + y^2 + z^2$.

   • Solución:

   Al dejar x^3, y^3, z^3 el mismo residuo al dividir entre p, se tiene que $p|z^3 - y^3$, $p|y^3 - x^3$ y $p|z^3 - x^3$.

   Note que $0 < z-y < p$, por lo cual $p \nmid z-y$. Pero $p|\left(z-y\right)\left(z^2+zy+y^2\right)$, por lo cual $p|z^2+yz+y^2$ y análogamente $p|x^2+xy+y^2$ y $p|x^2+xz+z^2$.

   También, $p|\left(x^2+xy+y^2\right)-\left(x^2+xz+z^2\right) = x\left(y-z\right)+\left(y-z\right)\left(y+z\right) = \left(y-z\right)\left(x+y+z\right)$. De nuevo, p no divide a $y - z$, y así $p|x+y+z$ (1).

   Así, $p|\left(2\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+xy+y^2\right)-\left(x^2+xz+z^2\right)\right) = 3\left(xy+xz+yz\right)$.

   Pero $0 < x < y < z < p \Rightarrow p \geq \Rightarrow (p,3) = 1 \Rightarrow p|xy+xz+yz \Rightarrow 2p|2xy+2xz+2yz$ (2).

   De (1), usando $0 < x+y+z < 3z < 3p$, se tiene que $x+y+z = p$ o $x+y+z = 2p$.

   En ambos casos $x+y+z|2p$.

   Usando (2), $x+y+z|2xy+2xz+2yz \Rightarrow x+y+z|\left(x+y+z\right)^2-\left(2xy+2xz+2yz\right) = x^2+y^2+z^2$.

3. Hallar todos los valores de n y m naturales, tales que

$$(n-1)\,2^{n-1}+5=m^2+4m$$

• Solución:

La ecuación se puede reescribir como $(n-1)2^{n-1}=m^2+4m-5=(m-1)(m+5)$. Si $n\geq 2$ entonces alguno de los factores debe ser par, luego, podemos suponer que $m-1=2k$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene que $(n-1)2^{n-1}=2k(2k+6)$, simplificando se obtiene que $(n-1)2^{n-3}=k(k+3)$, donde $n\geq 3$ y $k\geq 0$. Observe que los números k y $k+3$ tienen distinta paridad, de modo que necesariamente 2^{n-3} debe dividir alguno de ellos.

Caso 1. $2^{n-3}|k+3$

Como $2^{n-3}|k+3$, entonces necesariamente $k|n-1$, luego, se cumple que $2^{n-3}\leq k+3$ y $k\leq n-1$, luego, $2^{n-3}\leq n+2$. Verificando directamente se puede comprobar que esta desigualdad solo se cumple para $n\leq 6$. Verificando directamente cada caso se tiene que la única solución es $n=6$ y $k=5$, es decir $n=6$ y $m=11$.

Caso 2. $2^{n-3}|k$

Como $2^{n-3}|k$, entonces necesariamente $k+3|n-1$, luego, se cumple que $2^{n-3}\leq k$ y $k+3\leq n-1$, luego, $2^{n-3}\leq n-4$, pero esta desigualdad es falsa para todo valor de n, luego, no hay soluciones en este caso.

Finalmente, si $n=1$ se obtiene $0=(m-1)(m+5)$, en cuyo caso $n=1$ y $m=1$ es también una solución.

En resumen, las únicas soluciones son $(n,m)=(1,1)$ y $(n,m)=(6,11)$.

Álgebra

1. Hallar todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{yz^4}{x^2}} + 2wx = 0 \\ \\ \sqrt[3]{\dfrac{xz^4}{y}} + 5wy = 0 \\ \\ \sqrt[3]{\dfrac{xy}{z}} + 7wz^{-1/3} = 0 \\ \\ x^{12} + \dfrac{125}{4}y^5 + \dfrac{343}{2}z^4 = 16 \end{cases}$$

donde $x, y, z \geq 0$ y $w \in \mathbb{R}$.

• Solución:

Observe que x, y, z son distintas de cero. Multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por $y^{2/3}$ y la tercera por $z^{5/3}$, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcl} x^{1/3}y^{1/3}z^{4/3} & + & 2wx^2 & = & 0 \\ x^{1/3}y^{1/3}z^{4/3} & + & 5wy^{5/3} & = & 0 \\ x^{1/3}y^{1/3}z^{4/3} & + & 7wz^{4/3} & = & 0 \end{array}$$

Restando la primera menos la segunda se obtiene que

$$w\left(5y^{5/3} - 2x^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[5]{\frac{8x^6}{125}}$$

pues $w \neq 0$ (porque sino, $x = y = z = 0$, lo que es imposible).

Restando la primera menos la tercera se obtiene que

$$w\left(7z^{4/3} - 2x^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[4]{\frac{8x^6}{343}}$$

Sustituyendo ambas en la cuarta ecuación se obtiene que

$$x^{12} + 6x^6 - 16 = 0$$

Haciendo $u = x^6$, se obtiene que

$$u^2 + 6u - 16 = 0$$

Las raíces son $u = -8$ y $u = 2$, luego, la única posible es $u = 2$. Si $u = 2$ entonces $x = \sqrt[6]{2}$. Sustituyendo en las ecuaciones anteriores se obtiene que $y = \sqrt[5]{\dfrac{16}{125}}$ y $z = \sqrt[4]{\dfrac{16}{343}}$.

Finalmente, sustituyendo en la primera ecuación se obtiene que $w = -\dfrac{2^{29/90}}{7 \cdot 5^{1/5}}$, entonces la única solución es

$$\left(\sqrt[6]{2}, \sqrt[5]{\frac{16}{125}}, \sqrt[4]{\frac{16}{343}}, -\frac{2^{29/90}}{7 \cdot 5^{1/5}}\right)$$

2. El número inicial de habitantes de una ciudad de más de 150 habitantes es un cuadrado perfecto. Con un aumento de 1000 habitantes pasa a ser un cuadrado perfecto más una unidad. Después de otro aumento de 1000 habitantes vuelve a ser un cuadrado perfecto. Determinar la cantidad de habitantes que hay inicialmente en la ciudad.

   • Solución:

   Sea x el número inicial de habitantes de la ciudad y los números naturales a, b y c. Según las condiciones del problema

$$\begin{cases} x = a^2 \\ x + 1000 = b^2 + 1 \\ x + 2000 = c^2 \end{cases}$$

   Restando la tercera y segunda ecuación, $c^2 - b^2 = 1001 \Rightarrow (c-b)(c+b) = 7 \cdot 11 \cdot 13$ y como $c - b < c + b$ se tienen los siguientes casos

   a) $c - b = 1$ y $c + b = 1001 \Rightarrow c = 501$ y $b = 500 \Rightarrow x = 249\,001 = 499^2$ que es solución del problema.

   b) $c - b = 7$ y $c + b = 11 \cdot 13 = 143$ o $c - b = 11$ y $c + b = 7 \cdot 13 = 91$ donde se obtiene respectivamente $c = 75$ y $b = 68$ o $c = 51$ y $b = 40 \Rightarrow x = 3625$ o $x = 601$ que no son cuadrados perfectos.

   c) $c - b = 13$ y $c + b = 7 \cdot 11 = 77 \Rightarrow c = 45$ y $b = 32 \Rightarrow x = 25$ que es un cuadrado perfecto pero muy pequeño para una población.

   Por lo tanto, la ciudad tiene inicialemente 249 001 habitantes.

Funciones y Trigonometría

1. Sean a, b y c números reales, y sean $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $g(x) = cx^2 + bx + a$ funciones tales que $|f(-1)| \leq 1$, $|f(0)| \leq 1$ y $|f(1)| \leq 1$. Demuestre que si $-1 \leq x \leq 1$, entonces $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$ y $|g(x)| \leq 2$.

   • Solución:

   Se pueden conseguir coeficientes A, B y C tales que se tenga idénticamente:

$$f(x) = Ax(x+1) + Bx(x-1) + C\left(x^2 - 1\right)$$

   Particularizando para $x = 1, -1, 0$ se tiene
   $f(0) = -C \Rightarrow C = -f(0)$
   $f(1) = 2A \Rightarrow A = \dfrac{f(1)}{2}$
   $f(-1) = -2B \Rightarrow B = -\dfrac{f(-1)}{2}$

   Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(1)}{2}x(x+1) - \tfrac{f(-1)}{2}x(x-1) - f(0)\left(x^2-1\right), \forall x \in \mathbb{R} \\ &= \frac{f(1)}{2}x(x+1) + \frac{f(-1)}{2}x(1-x) + f(0)(1-x^2) \end{aligned}$$

   Por la hipótesis del enunciado se deduce que:

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x(x+1)| + \frac{1}{2}|x(1-x)| + |1-x^2|$$

   Además, como $-1 \leq x \leq 1$, $1 + x \geq 0$, $1 - x \geq 0$ y $1 - x^2 \geq 0$, por lo que

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \frac{|x|}{2}(x+1) + \frac{|x|}{2}(1-x) + (1-x^2) \\ &= \frac{|x|}{2}(x+1+1-x) + (1-x^2) \\ &= |x| + 1 - x^2 \\ &= -\left(x^2 - |x| + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\right) + 1 \\ &= -\left(|x| - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{5}{4} \\ &= \tfrac{5}{4} - \left(|x| - \tfrac{1}{2}\right)^2 \\ &\leq \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Por otra parte, para $x \neq 0$, $x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2\left(a \cdot \frac{1}{x^2} + b \cdot \frac{1}{x} + c\right) = cx^2 + bx + a = g\left(x\right)$.

Entonces

$$\begin{aligned} g\left(x\right) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) &= x^2\left[\frac{f(1)}{2}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+1\right) + \frac{f(-1)}{2}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) + f(0)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right] \\ &= \frac{f(1)}{2}\left(1+x\right) + \frac{f(-1)}{2}\left(x-1\right) + f(0)\left(x^2-1\right) \end{aligned}$$

válido para $-1 \leq x \leq 1$.

Así pues

$$\begin{aligned} \left|g\left(x\right)\right| &\leq \frac{|x+1|}{2} + \frac{|x-1|}{2} + |x^2-1| \\ &= \frac{x+1}{2} + \frac{1-x}{2} + 1 - x^2 \\ &= 2 - x^2 \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

2. Sea $f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+6x+9}+\sqrt[3]{x^2+4x+3}+\sqrt[3]{x^2+2x+1}}$$

Calcule $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2016)$

• Solución:

Observe que $x^2+6x+9=(x+3)^2$, $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$ y $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Entonces

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+6x+9}+\sqrt[3]{x^2+4x+3}+\sqrt[3]{x^2+2x+1}}\\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{(x+3)(x+1)}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{(x+3)(x+1)}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x+1}}\\
&= \frac{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x+1}}{2}
\end{aligned}$$

Por otro lado, observe que

$$\begin{aligned}
f(1) &= \frac{\sqrt[3]{1+3}-\sqrt[3]{1+1}}{2} &= \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\\
f(2) &= \frac{\sqrt[3]{2+3}-\sqrt[3]{2+1}}{2} &= \frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}{2}\\
f(3) &= \frac{\sqrt[3]{3+3}-\sqrt[3]{3+1}}{2} &= \frac{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}}{2}\\
f(4) &= \frac{\sqrt[3]{4+3}-\sqrt[3]{4+1}}{2} &= \frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}{2}
\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
f(1)+f(2)+f(3)+f(4) &= \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}+\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}{2}+\frac{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}}{2}+\frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}{2}\\
&= \frac{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{2}
\end{aligned}$$

Es decir, en la suma se cancelan todos los términos, excepto los dos primeros negativos y los dos últimos positivos. Aplicando esta propiedad se obtiene que

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(2016) = \frac{\sqrt[3]{2019}+\sqrt[3]{2018}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{2}$$

3. Sea $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ una función que cumple las siguientes condiciones:

   a) $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$,

   b) $f(a) = 0$ siempre que las cifras de la unidades de a sea 7,

   c) $f(10) = 0$.

   Hallar $f(2016)$

   • Solución:

   Al descomponer en factores primos el número 2016 se obtiene $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

   Por la condición *a*) se cumple que $f(2016) = f\left(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7\right) = f\left(2^5\right) + f\left(3^2\right) + f(7)$. Además $f(x^n) = nf(x)$, por lo que $f(2016) = 5f(2) + 2f(3) + f(7)$.

   Por otra parte, por las condiciones *c*) y *a*) se cumple que $f(10) = f(2 \cdot 5) = f(2) + f(5) = 0$, de donde $f(2) = 0$ y $f(5) = 0$ pues el rango de la relación son los enteros no negativos. La condición *b*) implica que $f(7) = 0$.

   Así $f(2016) = 5 \cdot 0 + 2f(3) + 0 = 2f(3)$.

   Dado que $f(3 \cdot 7 \cdot 7) = f(3) + f(7) + f(7) = f(147)$ y por *b*) $f(147) = 0$ y $f(7) = 0$, se cumple que $f(3) = 0$.

   $\therefore f(2016) = 0$.