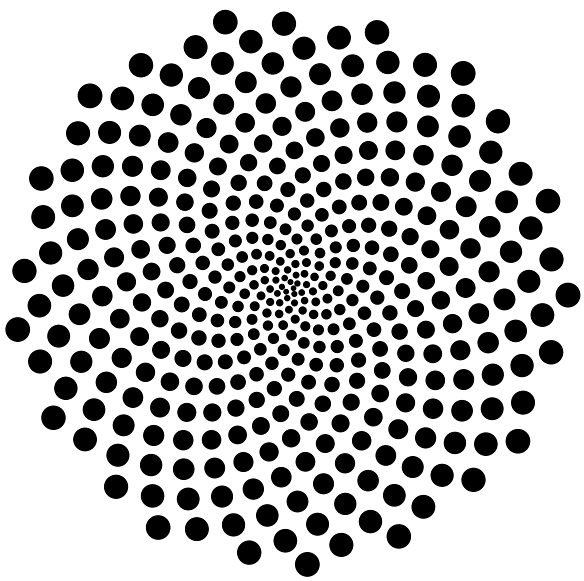
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

DÍA 1 – SOLUCIONES
BANCO DE PROBLEMAS



Nivel III

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

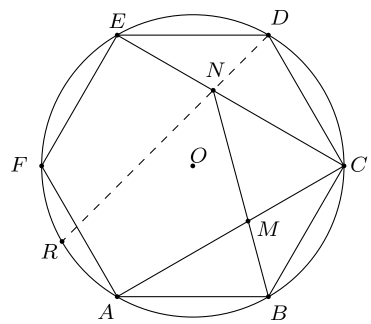
Lunes 13 de noviembre – Final 2017

GEOMETRÍA

1. Sean el hexágono regular $ABCDEF$ inscrito en una circunferencia de centro O, N un punto tal que $E-N-C$, M un punto tal que $A-M-C$ y R un punto en la circunferencia, tal que $D-N-R$. Si $m\,\widehat{EFR}=90°$, $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{CN}{CE}$ y $AC=\sqrt{3}$, determine AM.

   Solución:

   Considere la figura:



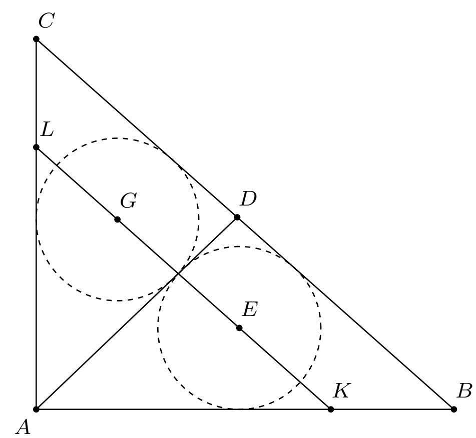
Así tenemos:

- $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{CN}{CE}$ y $AC=CE \Rightarrow AM=CN \Rightarrow EN=CM$
- $CB=ED$
- $m\angle ACB=m\angle CED=30$
- $\triangle BMC \cong \triangle DNE$ (L-A-L)
- $\angle MBC \cong \angle NDE$
- $m\angle NDE=m\angle RDE=\dfrac{1}{2}m\,\widehat{EFR}=45=m\angle MBC$
- $m\angle BCE=90$
- $m\angle BNC=45$
- $BC=NC$
- $\triangle BCE$ recto en C, $m\angle BEC=30$
- $EC=\sqrt{3}BC \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{BC}{EC}$
- $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{CN}{CE}=\dfrac{BC}{CE}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

- $AM = \frac{1}{\sqrt{3}}AC = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 1$

2. Considere el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ recto en A y sea D un punto sobre la hipotenusa $\overline{BC}$. Considere la recta que pasa por los incentros del $\triangle ABD$ y del $\triangle ACD$, y sean K y L las intersecciones de dicha recta con $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Demuestre que si $AK = AL$ entonces D es el pie de la altura sobre la hipotenusa.

   Solución:



Primero se va a mostrar que $AD = AK = AL$.

Considere I_1 e I_2 los incentros de $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$ respectivamente.

Sin perdida de generalidad supongamos que $\angle ADC \leq 90$. Sean $\angle BAD = 2\alpha$ y $\angle ADC = 2\omega$, así $\alpha \leq 45$ y $\omega \leq 45$.

Como $AK = AL$ entonces $\angle AKL = 45 = \angle ALK$.

Además se tiene que $\angle I_1DA = 90 - \omega$, $\angle AI_1D = 90 + \omega - \alpha$, $\angle KI_1A = 135 - \alpha$, $\angle ADI_2 = \omega$, $\angle AI_2D = 135 - \omega + \alpha$, $\angle LI_2A = 90 + \alpha$.

Por ley de senos en $\triangle AKI_1$ y $\triangle ADI_1$ se tiene que $AK = AI_1\frac{\sin(135-\alpha)}{\sin(45)}$ y $AD = AI_1\frac{\sin(90+\omega-\alpha)}{\sin(90-\omega)}$.

Note que $\frac{\sin(135-\alpha)}{\sin(45)} \geq \frac{\sin(90+\omega-\alpha)}{\sin(90-\omega)} \iff \frac{\sqrt{2}}{2}(cos(\omega)\cos(\alpha) + \cos(\omega)\sin(\alpha)) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\omega)\cos(\alpha) + \sin(\omega)\sin(\alpha)) \iff \cos(\omega)\sin(\alpha) \geq \sin(\omega)\sin(\alpha) \iff \cos(\omega) \geq \sin(\omega)$, lo cual es cierto ya que $\omega \leq 45$. Por lo que $AK \geq AD$.

Por ley de senos en $\triangle ALI_2$ y $\triangle ADI_2$ se tiene que $AL = AI_2\frac{\sin(90+\alpha)}{\sin(45)}$ y $AD = AI_2\frac{\sin(135+\alpha-\omega)}{\sin(\omega)}$.

Note que $\frac{\sin(135+\alpha-\omega)}{\sin(\omega)} \geq \frac{\sin(90+\alpha)}{\sin(45)} \iff \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(\omega-\alpha) + \cos(\omega-\alpha)) \geq \sin(\omega)\cos(\alpha) \iff -\sin(\omega)\cos(\alpha) - \cos(\omega)\sin(\alpha) + \cos(\omega)\cos(\alpha) + \sin(\omega)\sin(\alpha) \geq 0 \iff (\cos(\omega) - \sin(\omega))(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) \geq 0$, lo cual es cierto ya que $\omega \leq 45$ y $\alpha \leq 45$. Por lo que $AD \geq AL$.

De lo anterior como $AK \geq AD \geq AL$ y $AK = AL$ entonces $AK = AD = AL$.

Ahora como $\angle KAI_1 = \angle DAI_1$, $AI_1 = AI_1$ y $AK = AD$ entonces por criterio de congruencia L.A.L se tiene $\triangle AKI_1 \cong \triangle ADI_1$ y así $\angle ADI_1 = \angle AKI_1 = 45$ de donde $\angle BDA = 90$ y así D es el pie de la altura sobre la hipotenusa.

TEORÍA DE NÚMEROS

3. Determine el máximo común divisor de los números.

$$3^3-3, 5^5-5, 7^7-7, \cdots, 2017^{2017}-2017$$

Solución:

Como el menor de los números es $3^3-3=24$, entonces el mayor máximo común divisor que pueden tener todos los números de la lista es 24.

Todos los números son de la forma n^n-n con n impar y $n^n-n=n(n^{n-1}-1)$. Como $n-1$ es par, es de la forma $2k$ con k entero positivo y $n^{n-1}-1=n^{2k}-1=(n^2)^k-1$.

Si $n^2=m$, entonces m^k-1 se puede factorizar de la siguiente manera utilizando el teorema del factor.

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ \downarrow & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \end{array}$$

$$(m-1)(m^{k-1}+m^{k-2}+\cdots+1)$$

Así

$$\begin{aligned} n^n-n &= n(n^2-1)(n^{2k-2}+n^{2k-4}+\cdots+1) \\ &= n(n-1)(n+1)(n^{2k-2}+n^{2k-4}+\cdots+1) \end{aligned}$$

Ahora, $n, n-1, n+1$ es divisible entre 3.

Además, $(n-1)(n+1)=(2k)(2k+1+1)=2k(2k+2)=4k(k+1)$ que es divisible entre $4\cdot 2=8$, ya que $k(k+1)$ es divisible entre 2.

Luego, n^n-n es divisible entre [3,8]=24. Por lo tanto, el máximo común divisor es 24.

4. Un número entero positivo es *nefelibata* si al tomar el último dígito de izquierda a derecha y colocarlo de primero, manteniendo los demás en el mismo orden, el número resultante es exáctamente el doble del número original. ¿Cuál es el menor número nefelibata?

Solución:

Sea x el número en cuestión. Expresemos $x=10b+a$, donde a es el último dígito del número, y por lo tanto, es un entero no negativo menor que 10. Si b tiene k dígitos, entonces, sabemos que $2x=10^ka+b=2(10b+a)=20b+2a$.

De aquí obtenemos que $19b=(10^k-2)a$. Como 19 es primo y $0<a<10$, necesariamente se cumple que 19 no divide a a, y por lo tanto, divide a 10^k-2.

Por lo tanto, estamos buscando la combinación, si esta existe, del menor posible valor de k y el menor valor de a. Además, se tiene que $10^k \cong 2 \mod 19$.

Nótese que

$$
\begin{array}{lll}
10^1 \cong 10 \pmod{19}, & 10^2 \cong 5 \pmod{19}, & 10^3 \cong 12 \pmod{19}, \\
10^4 \cong 6 \pmod{19}, & 10^5 \cong 3 \pmod{19}, & 10^6 \cong 11 \pmod{19}, \\
10^7 \cong 15 \pmod{19}, & 10^8 \cong 17 \pmod{19}, & 10^9 \cong 18 \pmod{19}, \\
10^{10} \cong 9 \pmod{19}, & 10^{11} \cong 14 \pmod{19}, & 10^{12} \cong 7 \pmod{19}, \\
10^{13} \cong 17 \pmod{19}, & 10^{14} \cong 16 \pmod{19}, & 10^{15} \cong 8 \pmod{19}, \\
10^{16} \cong 4 \pmod{19}, & 10^{17} \cong 2 \pmod{19}. &
\end{array}
$$

De aquí se concluye que b tiene al menos 17 dígitos. Más aún, se tiene que

$$b = \frac{a(10^k - 2)}{19},$$

Si se intenta $k = 17$ y $a = 1$, se obtiene $b = 5\,263\,157\,894\,736\,842$, que tiene únicamente 16 dígitos, y por lo tanto, no es una solución.

Si se intenta $a = 2$, se obtiene $b = 10\,526\,315\,789\,473\,684$, y por lo tanto

$$x = 105\,263\,157\,894\,736\,842$$

y nótese que

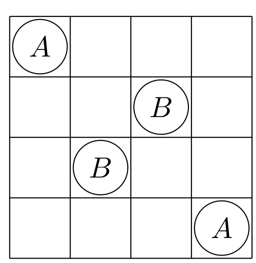
$$105\,263\,157\,894\,736\,842 \times 2 = 210\,526\,315\,789\,473\,684$$

por lo que tenemos nuestra solución.

RAZONAMIENTO LÓGICO

5. Un juego consiste de una cuadrícula de 4×4 y fichas de dos colores (Amarillas y Blancas). Un jugador escoje un tipo de ficha y se la da al segundo jugador quien la coloca donde quiera, luego el segundo jugador escoje un tipo de ficha y se la da al primero quien la coloca donde quiera, continúan de este modo y gana el que logre formar una línea con tres fichas del mismo color (horizontal, vertical o diagonal y sin importar si es la ficha con la que inició o no).

   Antes de iniciar la partida ya se encuentran colocadas dos fichas amarillas y dos blancas tal como muestra la figura siguiente



   Yolanda y Xinia juegan una partida. Si Yolanda inicia (escogiendo la ficha y dándosela a Xinia para que esta la coloque) indique si existe una estrategia ganadora para alguna de las dos jugadoras y, en caso de existir, describa la estrategia.

Solución:

Llamemos a las fichas amarillas A y a las blancas B. Veamos primero que una posición perdedora es aquella en la que, sin importar la ficha que le toque escoger al jugador, al dársela al otro ganará.

Vemos también que en la primera jugada Yolanda debe escoger A, pues si escoge B Xinia ganará. Por su parte Xinia debe colocar esta ficha A en una esquina, pues de lo contrario quedará en una posición perdedora. Igualmente, en la segunda jugada Xinia debe escoger A y Yolanda debe colocarla en la otra esquina. Entonces, luego de las dos primeras jugadas se tendrá el siguiente acomodo

A			A
		B	
	B		
A			A

Veamos ahora que Yolanda siempre puede ganar si escoge una A para darle a Xinia.

Si Xinia la coloca en una casilla central, debe escoger una B para darle a Yolanda y esta ganará con solo colocarla en la otra casilla central y escoger una A para darle a Xinia, pues sin importar donde la coloque quedará en una posición perdedora.

A			A
		B	
	B	A	
A			A

A			A
	B	B	
	B	A	
A			A

Si Xinia la coloca en una casilla de los lados tiene dos posibilidades, pues las posiciones 1 son simétricas entre sí, al igual que las posiciones 2:

A	2	1	A
2		B	1
1	B		2
A	1	2	A

I Caso:
Si la coloca en una posición 1, debe escoger una B y Yolanda la colocará tapando la fila de fichas A. Ahora Yolanda gana escogiendo una A, pues sin importar donde la coloque Xinia quedará en una posición perdedora.

A			A
		B	A
	B		
A			A

A			A
		B	A
	B		B
A			A

II Caso:
Si la coloca en una posición 2, debe escoger una B. Yolanda la colocará tapando la fila de fichas A (como indica la figura) y escoge una A para darle a Xinia. Observe que la única posibilidad de Xinia para colocar esta A es la casilla marcada con $*$, pues en todas las demás llevaría a una posición perdedora. Además, para no perder inmediatamente, debe escoger una B para darle a Yolanda.

A			A
		B	
	B		A
A			A

A			A
		B	B
	B		A
A			A

A			A
	$*$	B	B
	B		A
A			A

Ahora Yolanda gana colocando esta B en la casilla indicada y escogiendo una A para que Xinia coloque, pues al igual que el I Caso, sin importar donde la coloque Xinia quedará en una posición perdedora.

A			A
	A	B	B
	B	**B**	A
A			A

6. Se tiene un conjunto de 17 números enteros positivos consecutivos. Sea m el menor de estos números. Determine para cuáles valores de m se puede partir el conjunto en tres subconjuntos disjuntos, tales que la suma de los elementos de cada subconjunto sea la misma.

Solución:

Sea $m = n + 1$ y note que $\sum_{i=1}^{17}(n+i) = 17n + 17 \times 9$ por lo tanto n debe ser múltiplo de 3, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 3k$.

Ahora por palomar hay dos subconjuntos que tienen al menos 6 elementos, es decir que entre ellos dos hay 12 elementos. Así se tiene que:

$$2\left(\frac{17 \times 3k + 153}{3} - 6 \times 3k\right) \geq \sum_{i=1}^{12} i = 78 \Rightarrow 12 \geq k \Rightarrow 36 \geq n \tag{1}$$

Falta encontrar combinaciones que sirvan. Bastaría encontrar para k dos subconjuntos disjuntos de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$ de seis elementos cada uno tal que su suma de $51 - k$. Para esto observe la siguiente tabla:

k	51-k	Conjunto	Conjunto
12	39	1,2,3,10,11,12	4,5,6,7,8,9
11	40	1,2,3,9,12,13	4,5,6,7,8,10
10	41	1,2,3,8,13,14	4,5,6,7,9,10
9	42	1,2,3,7,14,15	4,5,6,8,9,10
8	43	1,2,3,,6,15,16	4,5,7,8,9,10
7	44	1,2,3,5,16,17	1,6,7,8,9,10
6	45	1,4,6,7,11,16	2,3,5,10,12,13
5	46	1,4,6,8,11,16	2,3,5,10,12,14
4	47	1,4,7,8,11,16	2,3,6,10,12,14
3	48	1,4,7,9,11,16	2,3,6,10,12,15
2	49	1,4,8,9,11,16	2,3,7,10,12,15
1	50	1,4,8,9,11,17	2,3,7,10,12,16
0	51	1,5,8,9,11,17	2,3,7,10,13,16

De esta forma todos los posibles valores de m son 1,4,7,10,13,16,19,22,25,28,31,34,37.