



# XXIX Olimpiada Costarricense de Matemática

## Nivel III – Día 2

*Martes 14 de noviembre de 2017*

- #4 Sea  $k$  un número real, tal que la ecuación  $kx^2 + k = 3x^2 + 2 - 2kx$  posee dos soluciones reales distintas. Determine todos los posibles valores de  $k$ , tales que la suma de las raíces de la ecuación sea igual al producto de las raíces de la ecuación aumentado en  $k$ .
- #5 Considere dos circunferencias  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  tangentes exteriormente en el punto  $S$ , tales que el radio  $\Pi_2$  es el triple del radio de  $\Pi_1$ . Sea  $l$  una recta que es tangente a  $\Pi_1$  en el punto  $P$  y tangente a  $\Pi_2$  en el punto  $Q$ , con  $P$  y  $Q$  distintos de  $S$ . Sea  $T$  un punto en  $\Pi_2$ , tal que el segmento  $\overline{TQ}$  es diámetro de  $\Pi_2$  y sea el punto  $R$  la intersección de la bisectriz del  $\angle SQT$  con  $\overline{ST}$ . Pruebe que  $QR = RT$ .
- #6 Sea  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente creciente, tal que  $f(x) f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1$ .  
Determine  $f(1)$ .

Tiempo: tres horas

Cada problema vale siete puntos