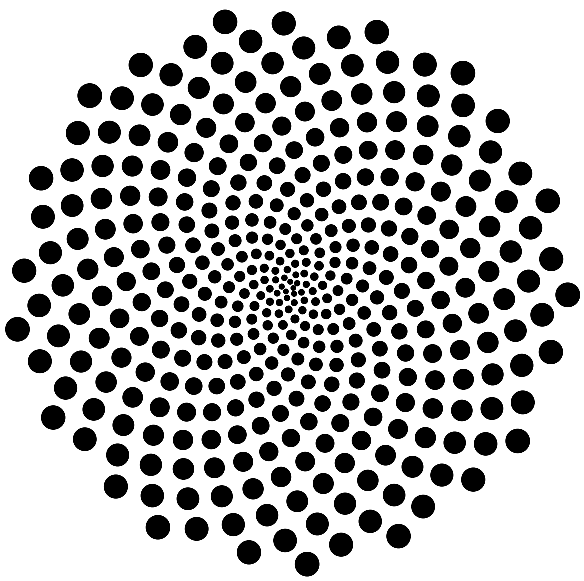
XXIX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

DÍA 2 – SOLUCIONES
BANCO DE PROBLEMAS



Nivel III

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

Martes 14 de noviembre – Final 2017

ÁLGEBRA

1. Sea $P(x)$ un polinomio de grado $2n$, tal que $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$ para $k = 0, \cdots, 2n$. Determine $P(2n+1)$.

   Solución:

   De la condición $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$ se tiene que $(k+1)P(k) - k = 0$ para $k = 0, \cdots, 2n$.

   Por tanto el polinomio $Q(x) = (x+1)P(x) - x$ de grado $2n+1$ tiene $2n+1$ soluciones y se puede escribir como: $Q(x) = (x+1)P(x) - x = Ax(x-1)(x-2)\cdots(x-2n)$.

   Para determinar A considere $x = -1$, de donde $1 = A \cdot -1 \cdot -2 \cdots (-2n-1) = -A(2n+1)!$, lo que significa $A = \dfrac{-1}{(2n+1)!}$ entonces

   $$(x+1)P(x) - x = \frac{-1}{(2n+1)!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-2n)$$

   Luego para $x \neq -1$ se tiene que $P(x) = \dfrac{1}{x+1}\left(x - \dfrac{1}{(2n+1)!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-2n)\right)$.

   Por tanto $P(2n+1) = \dfrac{1}{2n+2}\left(2n+1 - \dfrac{1}{(2n+1)!}(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots(1)\right) = \dfrac{n}{n+1}$

2. Sea k un número real, tal que la ecuación $kx^2 + k = 3x^2 + 2 - 2kx$ posee dos soluciones reales distintas. Determine todos los posibles valores de k, tales que la suma de las raíces de la ecuación sea igual al producto de las raíces de la ecuación aumentado en k.

   Solución:

   Se tiene que la ecuación $kx^2 + k = 3x^2 + 2 - 2kx$ es equivalente a la ecuación cuadráctica $(k-3)x^2 + 2kx + k - 2 = 0$.

   Se requiere que la ecuación $(k-3)x^2 + 2kx + k - 2 = 0$ posea dos soluciones reales distintas. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación.

   Debe cumplirse que $(2k)^2 - 4(k-3)(k-2) = 20k - 24 > 0$. De donde, $k > \frac{6}{5}$.

   Debe cumplirse que $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 + k$.

   Se sabe que $x_1 + x_2 = \dfrac{-2k}{k-3}$ y que $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{k-2}{k-3}$.

   De donde, debe cumplirse que $-2k = k - 2 + k \cdot (k-3)$. De donde, $k = -\sqrt{2}$ o $k = \sqrt{2}$.

   El único valor admisible para k es $\sqrt{2}$.

FUNCIONES

3. Sea $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $f(1) = 2018$ y $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$, para todo $n > 1$. Encuentre el valor de $f(2017)$.

Solución:

$$\begin{array}{rrcl} & f(1)+\cdots+f(n)+f(n+1) & = & (n+1)^2 f(n+1) \\ \Rightarrow & n^2 f(n)+f(n+1) & = & (n+1)^2 f(n+1) \\ \Rightarrow & n^2 f(n) & = & (n+1)^2 f(n+1)-f(n+1) \\ \Rightarrow & n^2 f(n) & = & f(n+1)\left[(n+1)^2-1\right] \\ \Rightarrow & f(n+1) & = & \dfrac{n^2 f(n)}{n^2+2n} \\ \Rightarrow & f(n+1) & = & \dfrac{n f(n)}{n+2} \end{array}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} f(2017) &= \frac{2016\cdot f(2016)}{2018} \\ &= \frac{2016\cdot 2015\cdot f(2015)}{2018\cdot 2017} \\ &= \frac{2016\cdot 2015\cdot 2014\cdots 3\cdot 2\cdot 1 f(1)}{2018\cdot 2017\cdot 2016\cdots 5\cdot 4\cdot 3} \\ &= \frac{2\cdot f(1)}{2018\cdot 2017} \\ &= \frac{2}{2017} \end{aligned}$$

4. Sea $f:\,]0,\infty[\,\to\mathbb{R}$ una función estrictamente creciente, tal que $f(x)\,f\left(f(x)+\dfrac{1}{x}\right)=1$.

   Determine $f(1)$.

   Solución:

   Considere $t=f(1)$. Si se evalúa la identidad descrita en $x=1$, obtenemos que

   $$f(1)f(f(1)+1)=tf(t+1)=1,$$

   de donde podemos concluir que $t\neq 0$, y que $f(t+1)=\dfrac{1}{t}$.

   Ahora, si se evalúa en $x=t+1$, obtenemos

   $$f(t+1)f\left(f(t+1)+\frac{1}{t+1}\right)=\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\right)=1$$
   $$\Rightarrow f\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\right)=t=f(1),$$

   y al ser f estrictamente creciente, se tiene que $\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t+1}=1$, lo que implica que $(t+1)+t=(t+1)t$, cuyas soluciones son $t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

   Nótese que si $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, tendríamos que $1<t=f(1)<f(t+1)=\frac{1}{t}<1$, que es una contradicción.

Por lo tanto:

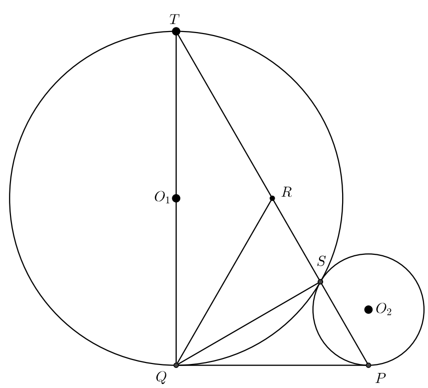
$$t = f(1) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

GEOMETRÍA

5. Considere dos circunferencia Π_1 y Π_2 tangentes exteriormente en el punto S, tales que el radio Π_2 es el triple del radio de Π_1. Sea l una recta que es tangente a Π_1 en el punto P y tangente a Π_2 en el punto Q, con P y Q distintos de S. Sea T un punto en Π_2, tal que el segmento $\overline{TQ}$ es diámetro de Π_2 y sea el punto R la intersección de la bisectriz del $\angle SQT$ con $\overline{ST}$. Pruebe que $QR = RT$.

   Solución:

   De acuerdo con la información dada, se obtiene la siguiente figura:



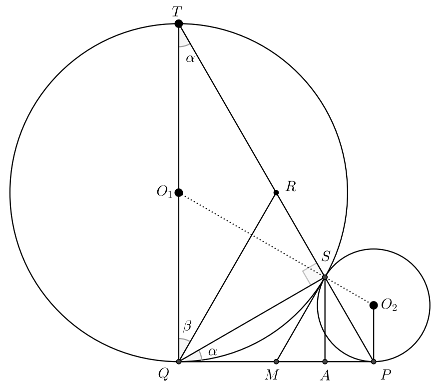
   Considere $m\angle RTQ = \alpha$ y $m\angle RQT = m\angle SQR = \beta$. Para demostrar que $QR = RT$, basta probar que $\alpha = \beta$. Como el $\angle QST$ es un ángulo inscrito en Π_2 y inscribe medio círculo, $m\angle QST = 90°$ y por lo tanto $\alpha + 2\beta = 90°$.

   Se tiene el paralelismo $O_1P \parallel O_2Q$, de modo que si A es el punto de intersección de una recta paralela a O_1P que pasa por S con la recta PQ, por el teorema de Tales se tiene que $\dfrac{PA}{AQ} = \dfrac{O_1S}{SO_2} = \dfrac{1}{3}$ y además $\overline{AS} \perp \overline{PQ}$.

   Luego se traza la tangente común a ambas circunferencias, por el punto S, se procede a denotar por M la intersección de dicha tangente con $\overline{PQ}$ y se sabe que las tangentes externas desde un mismo punto a un círculo son iguales, entonces $PM = MS$ y $MS = MQ$.

   Se puede observar que el punto M es el centro de una circunferencia que pasa por los puntos P, Q, S y por lo tanto el triángulo PSQ es rectángulo con ángulo recto en $\angle PSQ$, y como $\angle QST$ también es recto, los puntos P, S y T son colineales.

   Se sabe que $MS = MQ$, entonces $m\angle MSQ = m\angle MQS$ y como este último es semiinscrito en el arco $\widehat{SQ}$, entonces $m\angle MSQ = m\angle MQS = \alpha$, al igual que $m\angle STQ$. Lo mencionado anteriormente, se puede ver en la siguiente figura:



Como $\angle PMS$ es externo al $\triangle MSQ$, entonces la $m\angle PMS = 2\alpha$. Además, al ser $\triangle PSQ$ rectángulo, la $m\angle SPQ = 2\beta$ pues $m\angle PQS = \alpha$.

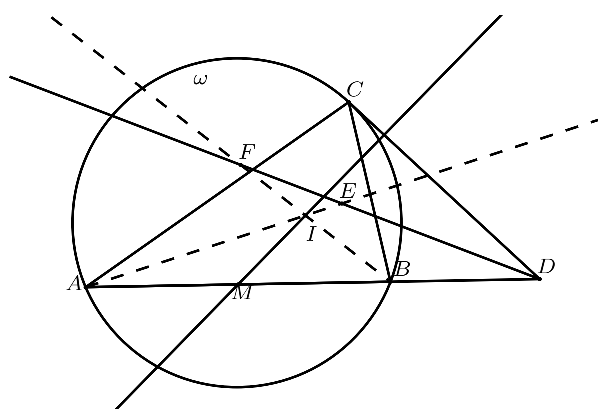
Por último, de la relación $AQ = 3PA$ que se encontro anteriormente, entonces $PQ = 4PA$ y como $PM = MQ$ se obtiene que $PM = 2PA$ y por tanto $AM = PA$. Por el criterior de congruencia LAL, se tiene que $\triangle PAS \cong \triangle MAS$, entonces $2\alpha = 2\beta$, es decir; $\alpha = \beta$.

Por lo tanto $\alpha = \beta$, entonces $QR = RT$.

6. En el triángulo ABC con incentro I y circuncírculo w, la tangente por C a w interseca $\overline{AB}$ en el punto D. Las rectas $\overleftrightarrow{AI}$ y $\overleftrightarrow{BI}$ intersecan a la bisectriz del $\angle CDB$ en E y F, respectivamente. M es el punto medio de $\overline{AB}$. Pruebe que $\overleftrightarrow{MI}$ pasa por el punto medio del arco ACB de w.

Solución:

Sea $AI \cap \omega = G$ y $BI \cap \omega = H$. P es el punto medio del arco ACB de ω
Tenemos que $\angle FEA = \angle EAB - \angle EDB = \frac{1}{2}(\angle CAB - \angle CDB) = \frac{1}{2}\angle DCA = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle FBA = \angle HGA \implies EF \parallel GH$.



Así IM pasa por el punto medio de GH (1)

Por otro lado es conocido que $GH \perp CI \implies GH \parallel CP \implies \angle GHB = \angle CHG = \angle PGH \implies HI \parallel PG$.

Similarmente, $GI \parallel PH \implies PGIH$ es un paralelogramo. Así IP pasa por el punto medio de GH (2)

De $(1),(2)$, tenemos que I, M, P son colineales.