XXXI Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

# BANCO DE PROBLEMAS

# DÍA 1

NIVEL III

($10^\circ - 11^\circ - 12^\circ$)

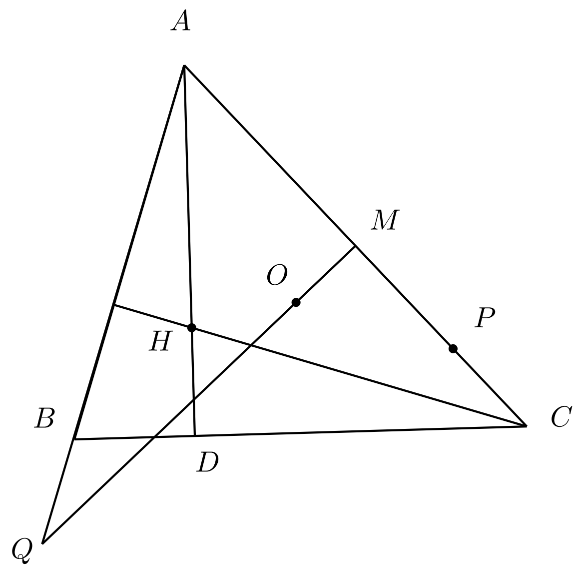
2019

## GEOMETRÍA

1. Sean $H$ el ortocentro y $O$ el circuncentro del triángulo acutángulo $\triangle ABC$. La circunferencia con centro en $H$ y radio $HA$ corta a las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ en los puntos $P$ y $Q$, respectivamente. Si el punto $O$ es el ortocentro del triángulo $\triangle APQ$, determine la medida del $\angle BAC$.

**Solución:**

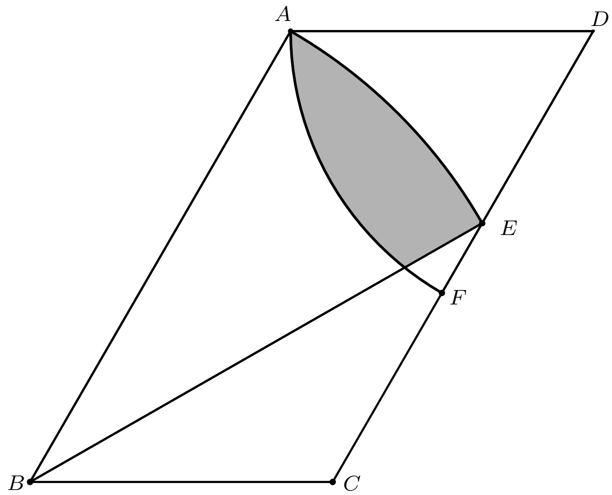
Como $AH = HQ$, el punto $H$ está sobre la mediatriz del $\overline{AQ}$, y como $\overline{CH}$ es altura del triángulo $ABC$, resulta qeu $\overline{CH}$ es la mediatriz del $\overline{AQ}$ y es altura del triángulo $AQC$.




Si $O$ es el ortocentro del triángulo $\triangle APQ$, resulta que $\overline{QO}$ es perpendicular a $\overline{AP}$. Luego, si $M$ es el punto medio del $\overline{AC}$ se tiene que $\overline{OM}$ es perpendicular al $\overline{AC}$ (también al $\overline{AP}$), por lo tanto los puntos $Q, O$ y $M$ son colineales. Luego $\overline{QM}$ es mediatriz y altura del triángulo $AQC$.

Como el circuncentro y el ortocentro del triángulo $\triangle AQC$ son iguales, el triángulo $\triangle AQC$ es equilátero. Por lo tanto, $m\angle BAC = m\angle QAC = 60°$.

2. Considere el paralelogramo $\square ABCD$, con $m\angle ABC = 60°$, y lados $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$. Sea $\omega$ el círculo de centro $B$ y radio $BA$, y sea $\tau$ el círculo de centro $D$ y radio $DA$. Determine el área entre las circunferencias $\omega$ y $\tau$, dentro del paralelogramo $\square ABCD$




**Solución**

Tenemos que el área del paralelogramo $\square ABCD$ es $(ABCD) = \dfrac{3}{2}$.

Si $E$ es la intersección de $\omega$ con $\overline{DC}$, entonces $BE = \sqrt{3}$, y por ley de senos en el triángulo $\triangle BEC$ se tiene que $\operatorname{sen}(\angle BEC) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}(120°) = \dfrac{1}{2}$. De donde $m\angle ABE = 30°$.

Ahora calculemos algunas áreas: el área del sector circular $ABE$ es $\dfrac{\pi}{4}$, y el área del sector circular $ADF$ es $\dfrac{\pi}{6}$, y además el área del triángulo $(EBC) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Así el área que queremos es $\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5\pi + 3\sqrt{3} - 18}{12}$.

## RAZONAMIENTO LÓGICO

1. En un lugar lejano del Universo, un villano tiene una medalla con poderes especiales y quiere esconderla para que nadie más la pueda usar. Para esto, el villano la esconde en un vértice de un polígono regular de 2019 lados. Olcoman, el salvador del pueblo Olcomita, quiere conseguir la medalla para reestablecer la paz en el Universo, para lo cual tiene que pagar 1000 olcolones por cada vez que realiza la siguiente jugada: en cada turno elige un vértice del polígono, el cual se torna verde si la medalla está en alguno de los cinco vértices más cercanos (incluyendo al mismo vértice) o rojo en caso contrario. Encuentre la menor cantidad de olcones que Olcoman debe pedirle a Maricela para determinar con certeza la posición de la medalla y poder reestablecer la paz en el Universo.

**Solución**

Vamos a probar que Olcoman no necesita más de 406000 olcolones para determinar la posición de la medalla y que este número es óptimo.

Primero vamos a probar que si en algún turno el vértice se torna verde, entonces Olcoman necesita a lo sumo 3000 olcolones más para determinar la posición exacta; en efecto, si Olcoman sabe que la medalla está entre $a - b - c - d - e$ entonces puede preguntar en el siguiente turno por el vértice $a$ (es decir, las piedras $* - * - a - b - c$). Si se torna rojo entonces es cuestión de un solo movimiento más para determinar si está entre $d$ y $e$. Si se torna verde entonces después puede preguntar por el vértice $d$ (es decir, las piedras $b - c - d - e - *$). Si se torna rojo entonces la medalla está en $a$ y si se torna verde entonces en un movimiento más se determina si está entre $b$ y $c$. Con esto probamos lo que afirmamos arriba.

Ahora demostramos que 406000 olcones son suficientes. Olcoman puede tocar 403 vértices "consecutivos" que tengan cuatro vértices entre sí; por ejemplo si los vértices están numerados $1, 2, \ldots, 2019$, entonces puede tocar los vértices $3, 8, 13, \ldots, 2013$ (estos son $(2013-3)/5+1 = 403$ vértices). Si alguno se torna verde en el proceso, entonces por el resultado anterior tendríamos que Olcoman es capaz de determinar la posición con no más de $(403000 + 3000) = 406000$ olcones (es posible hacerlo con menos si la luz se torna verde antes del turno 403). Si todos se tornan rojos entonces quiere decir que la medalla no está en ninguno de los vértices $1, 2, \ldots, 2015$, y por lo tanto solo queda encontrarlo entre $2016, \ldots, 2019$. En estos cuatro vértices se puede determinar la posición cos dos turnos más, por lo que en este caso solo se necesitarían 405000. En efecto, si pregunta por el vértice 2012 obtiene que la medalla está en $\{2016, 2017\}$ o $\{2018, 2019\}$, y con un turno más determina la posición final.

Finalmente demostramos que 405000 olcolones no son suficientes. Considere el caso en que los primeros 402 vértices que elige Olcoman se tornan rojos. Esto deja por lo menos $2019-5\cdot 402 = 9$ vértices de los que no se tiene información; llamémoslos *desconocidos*. Si 405000 olcolones fueran suficientes, entonces 3000 olcolones serían suficientes para determinar la medalla entre estos 9 vértices desconocidos. Para el siguiente paso estudiamos las dos posibilidades en la escogencia de Olcoman: que los cinco vértices mas cercanos al que toca sean desconocidos o que queden sin preguntar por lo menos cinco vértices desconocidos (esto sucede porque $9 - (5 - 1) = 5$). Si se diera el primer caso entonces consideramos que ese vértice se torna verde, y si se diera el segundo caso consideramos que el vértice se torna rojo. El problema se convierte en encontrar la medalla entre 5 posibles vértices con 2000 olcolones. Ahora hacemos un análisis de casos como el anterior: que tres de los cinco vértices mas cercanos al que toca sean desconocidos o que queden sin preguntar por lo menos tres vértices desconocidos (esto sucede porque $5-(3-1)=3$). Si se diera el primer caso entonces consideramos que ese vértice se torna verde, y si se diera el segundo caso consideramos que el vértice se torna rojo. El problema se convierte en encontrar la medalla entre 3 posibles vértices con 1000 olcolones. Repetimos el argumento de casos igual que antes: que dos de los tres vértices mas cercanos al que toca sean desconocidos o que queden sin preguntar por lo menos dos vértices desconocidos (esto sucede porque $3-(2-1)=2$). Si se diera el primer caso entonces consideramos que ese vértice se torna verde, y si se diera el segundo caso consideramos que el vértice se torna rojo. De esta manera se concluye que no es posible determinar la posición exacta de la medalla.

2. Un sitio web ofrece por 1000 colones, la posibilidad de jugar 4 turnos un determinado juego de azar, en cada turno el usuario tendrá la misma probabilidad $p$ de ganar la partida y obtener 1000 colones (por turno). Pero para calcular $p$ le solicita lanzar 3 dados y sumar los resultados, con lo cual $p$ será la probabilidad de obtener dicha suma.

   Olcoman visita el sitio web, y al lanzar los dados, se da cuenta que la probabilidad de perder su dinero es de $\left(\frac{103}{108}\right)^4$.

   *a*) Determine la probabilidad $p$ de que Olcoman gane una partida y los posibles resultados con los dados, para llegar a ésta.

   *b*) ¿Cuáles sumas (con los dados) da la máxima probabilidad de tener una ganancia de exactamente 1000 colones? Calcule dicha probabilidad y el valor de $p$ para este caso.

**Solución:**

*a*) Que Olcoman pierda su dinero significa que perdió con probabilidad $1-p$ en las 4 ocasiones entonces tendrá $(1-p)^4=\left(\frac{103}{108}\right)^4$ de donde $p=\frac{5}{108}=\frac{10}{216}$. Lo que significa que los casos favorables son 10 de 216. Esto ocurre cuando los dados suma 6 o suma 15.

1) Suma 6:

| Dados | Maneras |
|---|---|
| 1,1,4 | 3 |
| 1,2,3 | 6 |
| 2,2,2 | 1 |
| Total | 10 |

2) Suma 15:

| Dados | Maneras |
|---|---|
| 6,6,3 | 3 |
| 6,5,4 | 6 |
| 5,5,5 | 1 |
| Total | 10 |

*b*) Por otra parte como la suma de los dados van de 3 (1,1,1) a 18 (6,6,6) los valores con mayor probabilidad se obtiene cuando la suma es 10 o 11. Para obtener la suma de 10 hay 27 maneras:

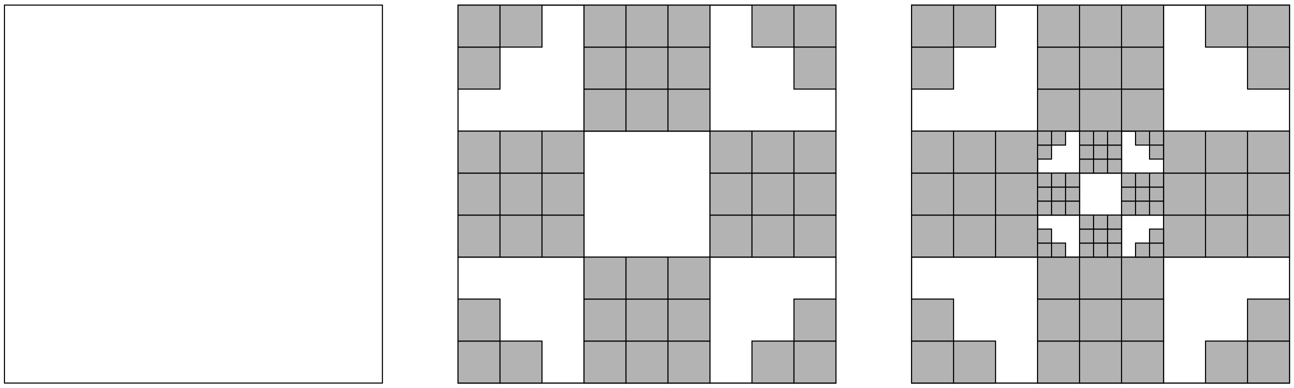
| Dados | Maneras |
|---|---|
| 6,1,3 | 6 |
| 6,2,2 | 3 |
| 5,1,4 | 6 |
| 5,2,3 | 6 |
| 5,4,1 | 6 |
| Total | 27 |

Del mismo modo se obtiene que hay 27 maneras de sumar 11 por tanto en ambos casos $p = \dfrac{27}{216}$

Finalmente para ganar 1000 colones es necesario ganar y perder 2 partidas. Es ocurre en 6 casos GGPP, GPGP, GPPG, PGPG, PPGG, PGGP todas con una probabilidad de $p^2(1-p)^2$. Por lo tanto la máxima probabilidad de ganar 1000 colones es:

$6p^2(1-p)^2 = \dfrac{3 \cdot 7^2}{2^{11}}$

3. Considere la siguiente secuencia de cuadrados (de lado 1), en cada paso el cuadrado central se divide en partes iguales y se colorea como se muestra en la figura:



Cuadrado 1 Cuadrado 2 Cuadrado 3

Sea $A_n$ con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ el área sombreada del cuadrado $n$, demuestre que $A_n < \dfrac{2}{3}$ .

**Solución:**

Note en el Cuadrado 2 es divido en $9^2$ cuadrados de los cuales hay 48 de ellos sombreados, es decir $A_2 = \dfrac{48}{9^2}$, del mismo modo tenemos: $A_3 = \dfrac{48}{9^2} + \dfrac{48}{9^3}$, $A_4 = \dfrac{48}{9^2} + \dfrac{48}{9^3} + \dfrac{48}{9^4}$.

Suponga como hipótesis de inducción que:

$$A_k = \frac{48}{9^2} + \frac{48}{9^3} + \frac{48}{9^4} + \cdots + \frac{48}{9^k}$$

Considere que el Cuadrado $k$ tendrá un cuadrado central de área $\dfrac{1}{9^k}$ (es decir de lado $\dfrac{1}{3^k}$), y para la construcción del Cuadrado $k+1$ se dividirá en 81 cuadrados de lado $\dfrac{1}{3^{k+1}}$ de los cuales se colorean 48 es decir se agrega un área de $48\dfrac{1}{3^{k+1}} \cdot \dfrac{1}{3^{k+1}} = \dfrac{48}{9^{k+1}}$. Por lo tanto se tiene que:

$$A_{k+1} = A_k + \frac{48}{9^{k+1}} = \frac{48}{9^2} + \frac{48}{9^3} + \frac{48}{9^4} + \cdots + \frac{48}{9^{k+1}}$$

Con lo que se concluye que para todo $n > 1$

$$A_n = \frac{48}{9^2} + \frac{48}{9^3} + \frac{48}{9^4} + \cdots + \frac{48}{9^n}$$

Por otra parte usando la progresión geométrica

$$A_n = 48\left(\frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} + \cdots + \frac{1}{9^n}\right)$$

$$A_n = 48\left(1 + \frac{1}{9^1} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} + \cdots + \frac{1}{9^n} - \frac{10}{9}\right)$$

$$A_n = 48\left(\frac{1-\dfrac{1}{9^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{9}} - \frac{10}{9}\right)$$

$$A_n = 48\left(\frac{1}{72} - \frac{1}{8\cdot 9^n}\right) = \frac{2}{3} - \frac{6}{9^n}$$

$$A_n < \frac{2}{3}$$

## ÁLGEBRA

1. Sean $x$, $y$ dos números enteros positivos, con $x \geq y$, tal que $2n = x + y$, donde $n$ es un número entero de dos dígitos. Si $\sqrt{xy}$ es un número entero con los dígitos de $n$ pero en orden inverso. Determine el valor de $x - y$

**Solución**

Sea $n = \dfrac{x+y}{2} = 10a + b$, entonces $\sqrt{xy} = 10b + a$, elevando al cuadrado la primera ecuación tenemos que:

$$(x+y)^2 = 4(10a+b)^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 400a^2 + 80ab + 4b^2$$

Del mismo modo, de la segunda ecuación tenemos que:

$$xy = 100b^2 + 20ab + a^2$$

Por lo tanto, si a la primera ecuación le restamos 4 veces la segunda

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = 400a^2 + 80ab + 4b^2 - 4(100b^2 + 20ab + a^2)$$

$$(x-y)^2 = 396a^2 - 396b^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot (a^2 - b^2)$$

Pero como $x - y$ es entero, entonces $a^2 - b^2 = 11k^2$ donde $k$ puede ser 1 o 2 ya que $a$ y $b$ son dígitos.
Si $k = 1$ entonces $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 11$ y como 11 es pirmo $a - b = 1$ y $a + b = 11$ por lo que $a = 6$ y $b = 5$
Si $k = 2$ entonces $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 11 \cdot 2^2$ pero como los factores $a - b$ y $a + b$ son menores que 18 la única posibilidad es que $a - b = 4$ y $a + b = 11$ por lo que $a = \dfrac{15}{5}$ y $b = \dfrac{7}{2}$ que no son enteras.

Finalmente

$$(x-y)^2 = 396a^2 - 396b^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$$

$$x - y = 66$$

2. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, halle todas las ternas $(x, y, z)$ que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 & = & 1 \\ y^2 - 3yz + 4z^2 & = & 2 \\ z^2 + 3zx - x^2 & = & 3 \end{cases}$$

**Solución**

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 & = & 1 & (i) \\ y^2 - 3yz + 4z^2 & = & 2 & (ii) \\ z^2 + 3zx - x^2 & = & 3 & (iii) \end{cases}$$

Note que $(i) + (ii) = (iii)$

$$(2x^2 - 3xy + 2y^2) + (y^2 - 3yz + 4z^2) = z^2 + 3zx - x^2$$

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 3xy - 3yz = z^2 + 3zx - x^2$$

$$(2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 3xy - 3yz) - (z^2 + 3zx - x^2) = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3xy - 3yz - 3zx = 0$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

Si se cumple que $(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$, también se cumple que $2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$. Nótese claramente que

$$2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 = 0, (y - z)^2 = 0, (z - x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = z$$

Sustituyendo a una sola variable en el sistema de ecuacione tenemos que las únicas ternas $(x, y, z)$ que cumplen el sistema de ecuaciones son $(-1, -1, -1)$ y $(1, 1, 1)$.