XXXI Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

BANCO DE PROBLEMAS

ENUNCIADOS

DÍA 1

NIVEL III

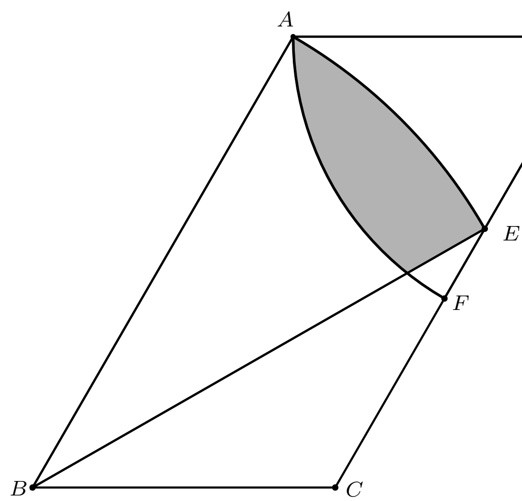
(10° – 11° – 12°)

2019

GEOMETRÍA

1. Sean H el ortocentro y O el circuncentro del triángulo acutángulo $\triangle ABC$. La circunferencia con centro en H y radio HA corta a las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ en los puntos P y Q, respectivamente. Si el punto O es el ortocentro del triángulo $\triangle APQ$, determine la medida del $\angle BAC$.

2. Considere el paralelogramo $\square ABCD$, con $m\angle ABC = 60°$, y lados $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$. Sea ω el círculo de centro B y radio BA, y sea τ el círculo de centro D y radio DA. Determine el área entre las circunferencias ω y τ, dentro del paralelogramo $\square ABCD$



RAZONAMIENTO LÓGICO

1. En un lugar lejano del Universo, un villano tiene una medalla con poderes especiales y quiere esconderla para que nadie más la pueda usar. Para esto, el villano la esconde en un vértice de un polígono regular de 2019 lados. Olcoman, el salvador del pueblo Olcomita, quiere conseguir la medalla para reestablecer la paz en el Universo, para lo cual tiene que pagar 1000 olcolones por cada vez que realiza la siguiente jugada: en cada turno elige un vértice del polígono, el cual se torna verde si la medalla está en alguno de los cinco vértices más cercanos (incluyendo al mismo vértice) o rojo en caso contrario. Encuentre la menor cantidad de olcones que Olcoman debe pedirle a Maricela para determinar con certeza la posición de la medalla y poder reestablecer la paz en el Universo.

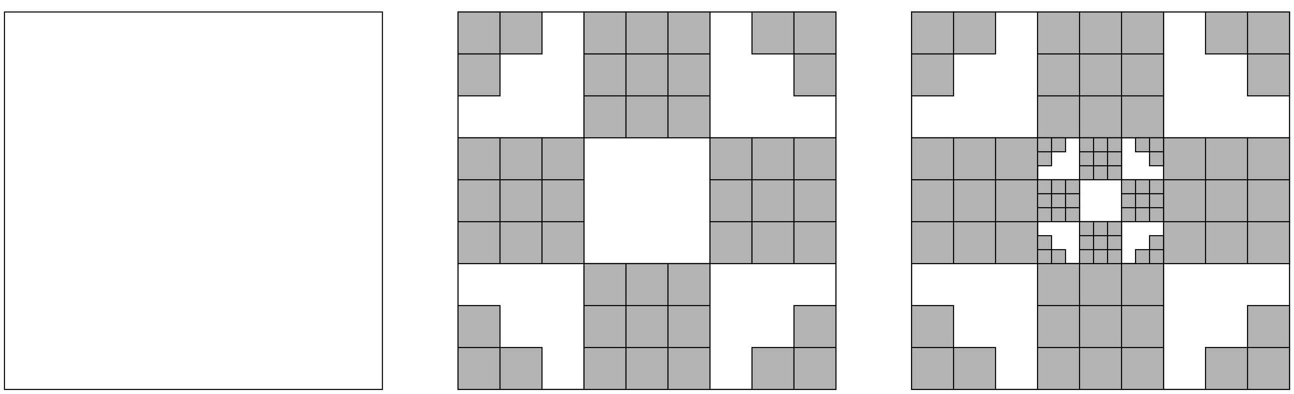
2. Un sitio web ofrece por 1000 colones, la posibilidad de jugar 4 turnos un determinado juego de azar, en cada turno el usuario tendrá la misma probabilidad p de ganar la partida y obtener 1000 colones (por turno). Pero para calcular p le solicita lanzar 3 dados y sumar los resultados, con lo cual p será la probabilidad de obtener dicha suma.

   Olcoman visita el sitio web, y al lanzar los dados, se da cuenta que la probabilidad de perder su dinero es de $\left(\frac{103}{108}\right)^4$.

   a) Determine la probabilidad p de que Olcoman gane una partida y los posibles resultados con los dados, para llegar a ésta.

   b) ¿Cuáles sumas (con los dados) da la máxima probabilidad de tener una ganancia de exactamente 1000 colones? Calcule dicha probabilidad y el valor de p para este caso.

3. Considere la siguiente secuencia de cuadrados (de lado 1), en cada paso el cuadrado central se divide en partes iguales y se colorea como se muestra en la figura:



Cuadrado 1 Cuadrado 2 Cuadrado 3

Sea A_n con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ el área sombreada del cuadrado n, demuestre que $A_n < \frac{2}{3}$.

ÁLGEBRA

1. Sean x, y dos números enteros positivos, con $x \geq y$, tal que $2n = x + y$, donde n es un número entero de dos dígitos. Si $\sqrt{xy}$ es un número entero con los dígitos de n pero en orden inverso. Determine el valor de $x - y$

2. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, halle todas las ternas (x, y, z) que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 & = & 1 \\ y^2 - 3yz + 4z^2 & = & 2 \\ z^2 + 3zx - x^2 & = & 3 \end{cases}$$