Cacería de angulitos

Entrenamiento avanzado para olimpiadas internacionales

Marianne Peña Wüst

17 de diciembre del 2019

1. Introducción

Una técnica que parece elemental pero que es sumamente útil para problemas de geometría en cualquier nivel es la *cacería de ángulos*. Esto consiste en encontrar las medidas de los ángulos en una figura, ya sea encontrando un valor variable o uno constante, tomando en cuenta las propiedades e identidades geométricas que tienen que ver con ángulos. Se asume que la persona lectora está familiarizada con las siguientes técnicas:

- Ángulos inscritos en un círculo.
- Ángulos complementarios y suplementarios.
- Ángulos entre rectas paralelas.
- Semejanza y congruencia de triángulos.
- Cuadriláteros concíclicos.
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono.
- Rectas y puntos notables.

2. Problemas

1. (OIM 2011, 4) Sea ΔABC acutángulo con $AC \neq BC$, y O es su circuncentro. Tome P y Q tal que $BOAP$ y $COPQ$ son paralelogramos. Pruebe que Q es el ortocentro de ΔABC.

2. (OIM 2012, 1) Sea $ABCD$ un rectángulo. Se construyen los triángulos equiláteros ΔBCX y ΔDCY de manera que estos triángulos compartan algunos de sus puntos interiores con los puntos interiores del rectángulo. Sea P la intersección de AX y CD, y Q la intersección de AY y BC. Pruebe que ΔAPQ es equilátero.

3. (EGMO 2015, 1) Sea ΔABC un triángulo acutángulo, y sea D el pie de la altura trazada desde C. La bisectriz de $\measuredangle ABC$ interseca a CD en E y vuelve a intersecar al circuncírculo ω de ΔADE en F. Si $\measuredangle ADF = 45°$, muestre que CF es tangente a ω.

4. (EGMO 2017, 1) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo que cumple que $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD = 90°$ y $\measuredangle ABC > \measuredangle CDA$. Sean Q y R puntos en los segmentos BC y CD, respectivamente, tales que la recta QR interseca las rectas AB y AD en los puntos P y S, respectivamente. Se sabe que PQ=RS. Sea M el punto medio de BD y sea N el punto medio de QR. Demuestre que los puntos M, N, A y C están en una misma circunferencia.

5. (IMO 2017, 4) Sean R y S puntos distintos sobre la circunferencia Ω tales que RS no es un diámetro de Ω. Sea ℓ la recta tangente a Ω en R. El punto T es tal que S es el punto medio del segmento RT. El punto J se elige en el menor arco RS de Ω de manera que Γ, la circunferencia circunscrita al triángulo JST, intersecta a ℓ en dos puntos distintos. Sea A el punto común de Γ y ℓ más cercano a R. La recta AJ corta por segunda vez a Ω en K. Demostrar que la recta KT es tangente a Γ.

6. (IMO 2015, 4) El triángulo ABC tiene circunferencia circunscrita Ω y circuncentro O. Una circunferencia Γ de centro A corta al segmento BC en los puntos D y E tales que B, D, E y C son todos diferentes y están en la recta BC en este orden. Sean F y G los puntos de intersección de Γ y Ω, tales que A, F, B, C y G están sobre Ω en este orden. Sea K el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo BDF y el segmento AB. Sea L el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo CGE y el segmento CA. Supongamos que las rectas FK y GL son distintas y se cortan en el punto X. Demostrar que X está en la recta AO.