Biyecciones en combinatoria

Entrenamiento avanzado para olimpiadas internacionales

Marianne Peña Wüst

24 de enero del 2020

1. Introducción

Una técnica muy útil para el conteo son las biyecciones, que se basa en el siguiente teorema:

Teorema 1.1. Sean A y B dos conjuntos finitos, y sea $n(A)$ y $n(B)$ la cardinalidad de estos, respectivamente. Entonces,

$$\exists f : A \longrightarrow B \,|\, f \text{ es biyectiva} \Longrightarrow n(A) = n(B).$$

Para probar este teorema, primero se debe recordar que toda función biyectiva es tanto inyectiva como sobreyectiva. Ahora, que una función sea inyectiva significa que todos los elementos del rango tienen una única preimagen. Un resultado directo de esta definición es que, si tomamos $\mathcal{R}$ como el rango de f, $n(A) = n(\mathcal{R})$. Entonces, como $\mathcal{R} \subseteq B$, $n(A) \leq n(B)$. Luego, que f sea sobreyectiva significa que $\mathcal{R} = B$. También note que dos elementos de $\mathcal{R}$ pueden tener una misma preimagen, así que $n(B) \leq n(A)$. Finalmente, como f es tanto sobreyectiva como inyectiva, tenemos que $n(A) \leq n(B) \wedge n(B) \leq n(A)$, lo cual implica que $n(B) = n(A)$.

$\therefore \exists f : A \longrightarrow B \,|\, f$ es biyectiva $\Longrightarrow n(A) = n(B)$. ■

El Teorema 1.1 indica que si tenemos dos problemas de conteo y logramos probar que existe una biyección entre el conjunto solución de ambos, los problemas tienen el mismo número de soluciones. Esto se debe a que dos conjuntos tienen la misma cardinalidad si se puede establecer una biyección entre ellos. Es por esta razón que la biyecciones se utilizan como una técnica para resolver problemas de combinatoria. Para probar que una biyección esté bien definida se debe demostrar:

- Cómo obtener un elemento del primer conjunto de uno del segundo.
- Cómo obtener un elemento del segundo conjunto de uno del primero.
- Por qué ambas construcciones son inversas.

2. Algunos teoremas y resultados

2.1. Bolas y paredes

La técnica conocida popularmente como "bolas y paredes" es muy útil en combinatoria. Consiste básicamente en considerar los espacios entre los sumandos de una expresión al hacer un problema de conteo.

Teorema 2.1.1. Existen $\binom{n-1}{m-1}$ m-tuplas ordenadas $(x_1, x_2, ..., x_m)$ de enteros positivos que satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$.

Prueba: Tome n 1's y póngalos en una fila. Ahora, considere los espacios entre los 1's, que son $n-1$. Para generar una tupla, se deben colocar $m-1$ "separadores" en cualesquiera de los espacios, uno en cada uno. Los grupos de 1's que resultan entre los separadores se suman. Por ejemplo, si tomamos $n = 10$ y $m = 4$, se procedería así para encontrar la 4-tupla $(3, 1, 2, 4)$:

$$1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1 = 10$$
$$1\;1\;1 + 1 + 1\;1 + 1\;1\;1\;1 = 10$$
$$3 + 1 + 2 + 4 = 10.$$

Siguiendo este algoritmo, el problema se reduce a ordenar $m-1$ en $n-1$ espacios, es decir, hay $\binom{n-1}{m-1}$ m-tuplas ordenadas. ■

Teorema 2.1.2. Existen $\binom{n+m-1}{m-1}$ m-tuplas ordenadas $(x_1, x_2, ..., x_m)$ de enteros no negativos que satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$.

Prueba: Tome $n+m$ círculos blancos y póngalos en una fila. Rellene el último círculo de negro. Luego, escoja cualesquiera $m-1$ de los demás círculos al azar y los rellena. De izquierda a derecha, llamemos a los círculos negros Cordelio$_1$, Cordelio$_2$, ..., Cordelio$_{k-1}$, Cordelio$_k$. Los $x_1, x_2, ..., x_m$ corresponden a la cantidad de círculos blancos entre Cordelio$_1$ y Cordelio$_2$, Cordelio$_2$ y Cordelio$_3, ...,$ Cordelio$_{k-1}$ y Cordelio$_k$. Por ejemplo, si tenemos $m = 7$ u $n = 5$. La 7-tupla (1, 0, 1, 0, 2, 1, 0) corresponde al arreglo:

$$\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet$$

Esta claramente es una biyección. Entonces, el número de m-tuplas ordenadas es el mismo que el número de maneras en las que se pueden elegir $m-1$ círculos entre $n+m-1$ círculos.

$\therefore$ El número de m-tuplas ordenadas es $\binom{n+m-1}{m-1}$.

2.2. Números de Catalán

A través de biyecciones se puede encontrar una sucesión de números que a menudo es útil para problemas.

Ejemplo 2.2.1. Considere una cuadrícula de mxn. Si solo se puede caminar por los lados de las casillas, y solo se puede ir arriba o a la derecha, podemos preguntarnos, ¿cuántas formas posibles hay de llegar del extremo inferior izquierdo al extremo superior derecho?

Solución: Tome la siguiente cuadrícula en la que m=10 y n= 6 como referencia. La línea naranja muestran un camino posible.

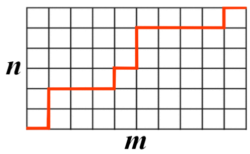

Figura 1: Cuadrícula con camino.

Note que, si D simboliza una movida hacia la derecha y A una hacia arriba, podemos escribir cada camino como una secuencia de m D's y n A's. El camino de la Figura 1 se puede escribir de la siguiente forma:

DAADDDADAADDDDAD

Por tanto, para encontrar la respuesta podemos simplemente encontrar cuántas formas hay de colocar m D's en $m+n$ espacios, ya que al colocar las D's podemos colocar exactamente n A's en los espacios restantes y obtener un camino válido, ya que:

- Todo camino puede convertirse en un arreglo de D's y A's porque corresponden a los movimientos (derecha o arriba).
- Todo arreglo de D's y A's puede traducirse en un camino si se va hacia la derecha cuando hay una D y arriba cuando hay una A.
- Son inversas porque todo camino se puede representar como un arreglo de D's y A's y viceversa.

¿Cuántas formas hay de colocar m D's en $m+n$ espacios? Este es el número de maneras en las que se pueden escoger m espacios de $m+n$, es decir, $\binom{m+n}{m}$. Por lo tanto, esta permutación es el número de caminos posibles. ■

Ejemplo 2.2.2. Se tiene una cuadrícula de nxn y se traza su diagonal que va de la esquina inferior izquierda a la superior derecha. ¿Cuántos caminos habría si se tiene que llegar de la esquina inferior izquierda a la superior derecha sin sobrepasar esta línea?

Solución: Llamemos *caminos rebeldes* a los caminos que sobrepasan la diagonal. Ahora, tomemos la diagonal del cuadrado de (n-1)x(n-1), como en la figura:

Como se puede observar en la Figura 2, todo camino rebelde debe cortar la diagonal de este pequeño cuadrado en alguno de sus puntos. Ahora, reflejemos la porción del camino rebelde que se encuentra

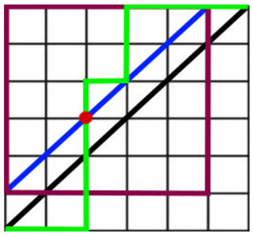

Figura 2: Un camino rebelde (línea verde), con un punto rojo en el que choca con la diagonal del cuadradito (n-1)x(n-1). El cuadradito (n-1)x(n-1) es el que está delimitado por la línea vino, y la diagonal de este cuadradito es la línea azul.

bajo la diagonal del cuadradito (n-1)x(n-1)) (la línea azul) a partir de su punto de intersección (el punto rojo). Resultaría una construcción de la siguiente manera:

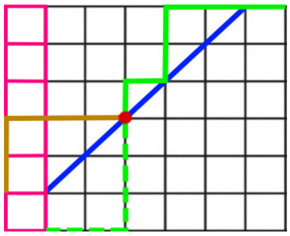

Figura 3: La línea naranja es la reflexión de la línea verde punteada con respecto al punto rojo. La columna rosada se tuvo que añadir porque la reflexión se sale de la cuadrícula original de nxn.

Es fácil notar con la Figura 3 que el camino resultante de la transformación siempre se encuentra dentro una cuadrícula de (n+1)x(n-1). Además, esta cuadrícula no tiene ninguna restricción. Hemos encontrado una biyección de este problema al Ejemplo 2.2.1, en el caso de una cuadrícula (n+1)x(n-1).

Por ende, tenemos que el número de caminos rebeldes es:

$$\binom{(n+1)+(n-1)}{n+1}=\binom{2n}{n+1}$$

Los caminos posibles que se pueden hacer en una cuadrícula de nxn son:

$$\binom{n+n}{n}=\binom{2n}{n}$$

Por lo tanto, para obtener el número que se solicita, hay que tomar el número total de caminos posibles y restarle el de caminos rebeldes:

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{2n!}{(n!)(n!)} - \frac{2n!}{(n-1)!(n+1)!}\\ &= \frac{2n!(n+1)-2n!(n)}{(n)!(n+1)!}\\ &= \frac{2n!}{(n)!(n)!}\cdot\frac{1}{n+1}\\ &= \binom{2n}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Aquí aparece un resultado muy importante: los **números de Catalán**. Esta es una secuencia de números naturales cuya notación es:

$$C_n=\binom{2n}{n}\cdot\frac{1}{n+1}$$

En donde C_n representa el n-ésimo número de Catalán.

$\therefore$ El número de caminos posibles es C_n. ■

Ejemplo 2.2.3. Si tenemos n parejas de paréntesis, ¿cuántas formas hay de organizarlas para que formen una configuración válida linguísticamente, es decir, que cada paréntesis abierto tenga uno que lo cierre y viceversa? Por ejemplo, si tomamos n=3, estas serán las parejas posibles:

(())()   ()(())   ()()()   ((()))   (()())

Solución: Nótese que podemos hacer una biyección al Ejemplo 2.2.2. Simplemente tome "(" como un movimiento hacia la derecha (D) y ")" como un movimiento hacia arriba (A). Ahora, enlistemos los distintos caminos posibles de la cuadrícula restringida con n=6.

DDAADA DADDAA DADADA DDDAAA DDADAAA

Y es fácil observar que estos arreglos corresponden a uno de los de los paréntesis.

¿Por qué sucede esto? Primero, tanto en la cuadrícula como en los paréntesis el arreglo debe empezar con una D ó con "(", respectivamente. Luego, siempre debe haber más D ó "(" a la izquierda del arreglo, ya que:

- Si hay maś A's a la izquierda que D's, entonces el camino sobrepasaría la diagonal.
- Si hay más ")" a la izquierda que "(", entonces habría un ")" que no se había abierto anteriormente.

$\therefore$ Hay C_n arreglos posibles de paréntesis. ■

3. Ejercicios

Problema 3.1. Sean n y k enteros positivos. Demuestre que el número de particiones de n con exactamente k partes es igual al número de particiones de n cuyo mayor sumando es k.

**Nota*: Una *partición* de n es una forma de escribir n como una suma de enteros positivos.

Problema 3.2. Se construye una cuadrícula triangular "cuadriculando" un triángulo equilátero de lado n en n^2 triangulitos equiláteros de lado 1. Determine el número de paralelogramos que están dentro del triángulo grande (no solo los pequeñitos, todos).

Problema 3.3. Muestre que el número de particiones de n en partes distintas es igual al número de particiones de n en partes impares.

Problema 3.4. Encuentre el número de grafos de árbol con $n+1$ vértices.

Problema 3.5. Sea n un entero positivo. ¿De cuántas formas se puede escribir n como una suma de al menos dos números?

**Nota*: El orden importa, es decir, si son los mismos números pero con un ordenamiento diferente, entonces cuentan como distintos.

Problema 3.6. Cada uno de los vértices de un enéagono regular se pinta azul o rojo. Pruebe que siempre existen dos triángulos monocromáticos (es decir, cuyos vértices son todos del mismo color) que son congruentes.

Problema 3.7. Cinco dados regulares se tiran. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los cinco números resultantes sea 14?

Problema 3.8 (AIME 2000). Dados tres anillos distintos, encuentre el número de arreglos de cinco anillos en cuatro dedos de la mano (sin contar el pulgar).

**Nota*: El orden de los anillos en cada anillo importa, pero no es necesario que cada dedo tenga un anillo.

Problema 3.9 (Putnam 2002). Sea n un entero mayor que uno, y T_n el número de conjuntos cuyos elementos están entre 1 y n y además su promedio es entero. Pruebe que $T_n - n$ siempre es par.

Problema 3.10 Tenemos n carros en orden que entran en un parqueo con n espacios. Cada carro tiene un espacio favorito. Cuando entran van a su lugar favorito y si está disponible lo toman pero sino van al siguiente espacio disponible. ¿Cuantas combinaciones de lugares favoritos hay?