Descenso infinito

Luis Diego Mata Boschini

1. Definición

El descenso infinito es una técnica utilizada en la resolución de problemas, la cual se basa en la contradicción y el principio del buen orden. Recordemos que el principio del buen orden nos dice que cualquier subconjunto de los naturales ($\mathbb{N}$) tiene un primer elemento.
Estos problemas trabajan usualmente sobre los números naturales, y lo que buscan es probar que no existen naturales que cumplan una cierta propiedad. Para su resolución, consideramos el menor valor de los que cumplen la propiedad y probamos que hay uno menor por lo que no se satisface el principio del buen orden lo cual nos lleva a una contradicción.
De forma más formal vemos:

Si para todo $k \geq r$ tal que $P(k)$ es verdadero existe un $j \geq r$ tal que $k > j$ y $P(j)$ es verdadero, entonces $P(m)$ es falso para todo $m > r$. Donde $r \in \mathbb{N}$.

Recordar que este método se utiliza cuando tenemos propiedades sobre los números naturales, o sobre elementos que tenemos una cantidad mínima que podemos tomar. Si no se tiene la propiedad de ser acotados inferiormente, esta técnica no se puede utilizar.

2. Ejercicios

1. Encuentre todas las soluciones enteras de $a^2 - 2b^2 = 0$.
2. Encuentre todas las tripletas (x, y, z) de enteros positivos que satisfacen:
$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 3xyz = 0$$
3. Demuestre que la siguiente ecuación no tiene soluciones en los enteros positivos:
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$
4. Sea ΔABC un triángulo acutángulo. Sea A_1 el pie de la altura desde A sobre BC, A_2 el pie de la altura desde A_1 sobre CA, A_3 el pie de la altura desde A_2 sobre AB y así sucesivamente. Pruebe que $A_i \neq A_j \;\; \forall i \neq j$
5. Pruebe que no hay una progresión aritmética infinita cuyos términos son todos cuadrados perfectos. **Recordar:** Una progresión aritmética es aquella tal que $a_{n+1} - a_n = c \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

6. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ números enteros tales que si cualquiera de ellos se quita entonces los restantes se pueden dividir en dos grupos de igual suma. Muestre que todos los números son iguales.

7. (Hungría 2000) Encuentre todos los números primos p para los cuales existen enteros positivos a, b, n tal que $a^3 + b^3 = p^n$.

8. Pruebe que para $n \neq 4$ no existe un polígono regular de n lados con coordenadas enteras.

9. Encuentre todas las parejas de números enteros positivos (a, b) tal que $ab + a + b$ divide a $a^2 + b^2 + 1$

10. Sean a y b enteros positivos. Muestre que si $4ab - 1$ divide a $(4a^2 - 1)^2$, entonces $a = b$.

11. Demuestre que $x^4 + y^4 = z^2$ no tiene soluciones enteras si $xyz \neq 0$