Descenso infinito

Luis Diego Mata Boschini

1. Definición

El descenso infinito es una técnica utilizada en la resolución de problemas, la cual se basa en la contradicción y el principio del buen orden. Recordemos que el principio del buen orden nos dice que cualquier subconjunto de los naturales ($\mathbb{N}$) tiene un primer elemento.
Estos problemas trabajan usualmente sobre los números naturales, y lo que buscan es probar que no existen naturales que cumplan una cierta propiedad. Para su resolución, consideramos el menor valor de los que cumplen la propiedad y probamos que hay uno menor por lo que no se satisface el principio del buen orden lo cual nos lleva a una contradicción.
De forma más formal vemos:

Si para todo $k \geq r$ tal que $P(k)$ es verdadero existe un $j \geq r$ tal que $k > j$ y $P(j)$ es verdadero, entonces $P(m)$ es falso para todo $m > r$. Donde $r \in \mathbb{N}$.

Recordar que este método se utiliza cuando tenemos propiedades sobre los números naturales, o sobre elementos que tenemos una cantidad mínima que podemos tomar. Si no se tiene la propiedad de ser acotados inferiormente, esta técnica no se puede utilizar.

2. Ejercicios

1. Encuentre todas las soluciones enteras de $a^2 - 2b^2 = 0$.
2. Encuentre todas las tripletas (x, y, z) de enteros positivos que satisfacen:
$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 3xyz = 0$$
3. Demuestre que la siguiente ecuación no tiene soluciones en los enteros positivos:
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$
4. Sea ΔABC un triángulo acutángulo. Sea A_1 el pie de la altura desde A sobre BC, A_2 el pie de la altura desde A_1 sobre CA, A_3 el pie de la altura desde A_2 sobre AB y así sucesivamente. Pruebe que $A_i \neq A_j \ \ \forall i \neq j$
5. Pruebe que no hay una progresión aritmética infinita cuyos términos son todos cuadrados perfectos. **Recordar:** Una progresión aritmética es aquella tal que $a_{n+1} - a_n = c \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

6. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ números enteros tales que si cualquiera de ellos se quita entonces los restantes se pueden dividir en dos grupos de igual suma. Muestre que todos los números son iguales.

7. (Hungría 2000) Encuentre todos los números primos p para los cuales existen enteros positivos a, b, n tal que $a^3 + b^3 = p^n$.

8. Pruebe que para $n \neq 4$ no existe un polígono regular de n lados con coordenadas enteras.

9. Encuentre todas las parejas de números enteros positivos (a, b) tal que $ab + a + b$ divide a $a^2 + b^2 + 1$

10. Sean a y b enteros positivos. Muestre que si $4ab - 1$ divide a $(4a^2 - 1)^2$, entonces $a = b$.

11. Demuestre que $x^4 + y^4 = z^2$ no tiene soluciones enteras si $xyz \neq 0$

3. Soluciones

1. Asuma que (a, b) cumple la ecuación. Así tenemos que: $a^2 = 2b^2$ por lo que a^2 es par y por lo tanto a lo es y así existe a_1 tal que $a = 2a_1$. Entonces $4a_1^2 = 2b^2$ por lo que $2a_1^2 = b^2$. Así tenemos que b es par y por tanto existe b_1 tal que $b = 2b_1$ y así $a_1^2 - 2b_1^2 = 0$ por lo que existe una solución menor. Ahora por descenso infinito tenemos que la ecuación no tiene soluciones.

2. Se asume que (x, y, z) cumple la proposición y notemos que:

$$x^3 + 3y^3 + 9z^2 - 3xyz \equiv 0 \pmod 3$$

$$\Rightarrow x^3 \equiv 0 \pmod 3$$

$$\Rightarrow x \equiv 0 \pmod 3$$

Tomando $x = 3x_1$ tenemos que:

$$27x_1^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9x_1yz = 0$$

$$\iff y^3 + 3z^3 + 9x_1^3 - 3yzx_1$$

Por lo que (y, z, x_1) cumple la ecuación. De igual manera tenemos que (x_1, y_1, z_1) es solución de la ecuación, donde $3y_1 = y$ y $3z_1 = z$. Y así por descenso infinito tenemos que la ecuación no tiene soluciones en los enteros positivos.

3. Observe que el lado derecho de la ecuación es un número par. Por lo que si (x, y, z) es una solución entonces 2 de ellos serán impares o ninguno lo será.
Notese que si tenemos dos impares y uno par. Entonces el lado izquierdo es congruente a 2 módulo 4 mientras que el lado derecho sería congruente a cero. Por lo que todos tienen que ser pares. Siendo $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ y $z = 2z_1$ tenemos que:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$$

Analogamente sabemos que x_1,y_1 y z_1 son pares y así:

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2$$

Se puede continuar análogamente consiguiendo que:

$$x = 2x_1 = 4x_2 = \cdots = 2^n x_n$$

$$y = 2y_1 = 4y_2 = \cdots = 2^n y_n$$

$$z = 2z_1 = 4z_2 = \cdots = 2^n z_n$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo que 2^n divide a x, y y z, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es imposible a menos que $x = y = z = 0$, por lo que la ecuación no tiene soluciones en los enteros positivos.

4. Considerando $A_0 = A$. Nótese que todo A_i esta sobre alguno de los lados del triángulo, no sobre sus extensiones ni sobre los vértices, para todo $i > 0$. Suponga que n es el menor número que cumple que para algún $m > n$ se tenga que $A_m = A_n$ eso significa que $A_{m-1} = A_{n-1}$ ya que sus perpendiculares son la misma recta. Por lo tanto n no es mínimo y por descenso infinito tenemos que $A_i \neq A_j \ \ \forall i \neq j$.
   También podemos observar que continuando de esta manera vamos a llegar a que $A = A_0 = A_{n-n} = A_{m-n}$ donde $m - n > 0$, pero A es un vértice y dijimos que ningún A_i es un vértice si $i > 0$

5. Aquí analizaremos dos casos, si la progresión es creciente o decreciente.
   Si es estrictamente creciente, notese que $0 < c < 2n+1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Como es creciente, eventualmente, $a_k \geq n^2$ y por tanto vemos que $r^2 - a_k \geq (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > c$ ya que la diferencia entre cuadrados perfectos es estrictamente creciente. Por lo tanto no existe el término a_{k+1}.
   Si la sucesión es decreciente tenemos que para todo cuadrado perfecto de la progresión, existe un cuadrado perfecto menor. Por descenso infinito vemos que no puede existir dicha progresión.

6. Sin pérdida de generalidad considere $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2n+1}$. Ahora consideremos $b_k = a_k - a_1$, nótese que b_k cumple las hipótesis del problema ya que a_n las cumple.
   Sea $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n+1}$, entonces sabemos que:

$$S - b_i \equiv S - b_j \equiv 0 \pmod 2 \ \ \forall i, j$$

$$\therefore b_i \equiv b_1 = 0 \pmod 2$$

   Por lo que podemos considerar $b'_i = \frac{b_i}{2}$ y este conjunto también cumple las hipótesis del problema. De forma análoga, tenemos que $2^k | b_i \ \ \forall k \in \mathbb{N}$ por lo tanto $b_i = 0 \ \ \forall i$.

$$\therefore a_k = a_1 \ \ \forall k$$

7. Para $p = 2$ tenemos que $2^1 = 1^3 + 1^3$ y para $p = 3$ tenemos $3^2 = 1^3 + 2^3$. Por lo que estos dos casos cumplen.
   Ahora tenemos que $p \geq 5$, por lo que a o b son mayores que uno. Así tenemo que $a^3 + b^3 \geq 5$ y como $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ y $a^2 - ab + b^2 = (a-b)^2 + ab \geq 2$ tenemos que p debe dividir a $a + b$ y a $a^2 - ab + b^2$ por lo que debe dividir a:

$$(a+b)^2 - (a^2 - ab + b^2) = 3ab$$

Como $p \geq 5$, p divide a a o a b pero como $p|a+b$ entonces p divide a a y a b. Entonces $a^3+b^3 \geq 2p^3$ por lo que $n \geq 3$ y entonces si (a,b,n) es una solución:

$$p^{n-3} = \frac{a^3+b^3}{p^3} = \left(\frac{a}{p}\right)^3 + \left(\frac{b}{p}\right)^3$$

Tenemos que $(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}, n-3)$ también es una solución. Y por descenso infinito tenemos que el sistema no tiene solución.

8. Empecemos considerando un triángulo equilátero de lado a, cuyos vértices están en coordenadas enteras, nótese que su área es de $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, donde a^2 es entero ya que las coordenadas son enteras. Sabemos que un triángulo con vértices en coordenadas enteras tiene área racional(Ejercicio al lector) por lo que llegamos a una contradicción.
   Un hexágono regular no puede tener todos sus vértices en coordenadas enteras ya que de lo contrario, si el hexágono tuviera vértices $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, entonces $P_1P_3P_5$ sería un triángulo equilátero de coordenadas enteras.
   Ahora consideremos un polígono de $n \neq 3,4,6$ lados. Trazamos las paralelas a P_iP_{i+1} por el punto P_{i-1} para todo i entre 1 y n, donde $P_0 = P_n$ y $P_{n+1} = P_1$. Los puntos de intersección de estás rectas dentro del polígono generan un nuevo polígono regular de n vértices con coordenadas enteras, es regular ya que los ángulos entre las paralelas descritas son de la medida correcta y tiene coordenadas enteras porque los nuevos vértices tienen la forma $P_{i-1} - P_i + P_{i+1}$ como esos tres puntos tienen coordenadas enteras su resultado también serán enteras. Por lo tanto para todo polígono regular con coordenadas enteras existe uno más pequeño. Por descenso infinito vemos que estos polígonos regulares no existen.

9. Nótese que:

$$b^2(4a^2-1)^2 - (4ab-1)^2a^2 - 2a^2(4ab-1) = a^2+b^2-8a^2b^2 = (a-b)^2 - 2ab(4ab-1)$$

   Por lo tanto tenemos que si $4ab-1 \mid (4a^2-1)^2$ entonces $4ab-1 \mid (a-b)^2$. Ahora asumamos que existen enteros positivos $a \neq b$ tal que $4ab-1 \mid (a-b)^2$. Sea $k = (a-b)^2/(4ab-1)$.

   Sea $S = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z}^+, (a-b)^2/(4ab-1) = k\}$. Como $\mid S \mid \geq 1$, existe una pareja $(A,B) \in S$ que minimiza $a+b$ para todos los $(a,b) \in S$. Spg asuma que $A > B$. Considere ahora la ecuación cuadrática

$$\frac{(x-B)^2}{4xB-1} = k \quad \Leftrightarrow x^2 - x(2B+4kB) + B^2 + k = 0$$

   La cual tiene raíces $x_1 = A$ y $x_2 = 2B + 4kB - A = (B^2+k)/A$ (por Vieta). Esto implica que $x_2 \in \mathbb{Z}^+$, entonces $(x_2, B) \in S$. Como $A+B$ es mínimo, tenemos que $x_2 \geq A$, o sea $(B^2+k)/A \geq A$ y por lo tanto $k \geq A^2 - B^2$.

   Ahora tenemos, $(A-B)^2/(4AB-1) = k \geq A^2 - B^2$ y por lo tanto $A - B \geq (A+B)(4AB-1)$, lo cuál es imposible para $A, B \in \mathbb{Z}^+$.
   Más soluciones a este problema en: https://artofproblemsolving.com/community/c6h159987p894656

10. Asumiendo que (x,y,z) es una tripleta que cumple las condiciones del problema.
   Si x y y son impares entonces el lado izquierdo es múltiplo de 2 pero no de 4, si z es impar esto es contradictorio y si z es par tenemos que el lado derecho es múltiplo de 4, lo cuál también

es contradictorio.
Si tanto x como y son pares tenemos que z debe ser par y por tanto tenemos:

$$(2x_1)^4 + (2y_1)^4 = (2z_1)^2$$

$$\Rightarrow x_1^4 + y_1^4 = \frac{z_1^2}{4}$$

Como x_1 y y_1 son ambos enteros tenemos que z_1 es par. Y así si (x, y, z) es una solución entonces $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{4})$ también lo es. Ahora por descenso infinito sabemos que no existen soluciones de esta forma.
Ahora si x y z son impares y y es par, tenemos que: