Notas sobre funciones y ecuaciones funcionales

Daniel Campos Salas

(Material en construcción)

Contents

1 Introducción

Recordemos que una **función** consiste en una *asignación* entre dos conjuntos (**dominio** y **codominio**), de manera que a todo elemento del dominio le corresponde un único elemento del codominio, al que llamamos la **imagen**. Si X y Y son el dominio y codominio, respectivamente, y f la asignación, entonces denotamos a la función por $f : X \to Y$.

Ejemplo. *A toda persona le corresponde un número natural dado por su edad. De esta manera tenemos la función* edad: $\{personas\} \to \mathbb{N}$.

No-ejemplo. *La asignación entre personas y números dado por el número de teléfono celular no es una función por varias razones: hay personas que no tienen teléfono celular y hay personas que tienen más de uno.*

La función $f : X \to Y$ puede cumplir algunas propiedades especiales y por eso se le pueden asignar ciertos adjetivos:

1. **inyectiva**: si no existen dos elementos (distintos) del dominio con la misma imagen; es decir, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$,

2. **sobreyectiva**: si todo elemento del codominio es la imagen de algún elemento del dominio; es decir, si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$,

3. **biyectiva**: si la función es inyectiva y sobreyectiva a la vez; en este caso, existe una función $g : Y \to X$, a la que llamamos la **función inversa**, que satisface $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$.

A las funciones entre ciertos conjuntos de números (como $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$) se le pueden asignar otros adjetivos:

4. **par o impar**: si satisface que $f(-x) = f(x)$ o $f(-x) = -f(x)$, respectivamente,

5. **monótona**: si la función siempre es **creciente** o **decreciente**; es decir, si para todo $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \leq f(x_2)$ o $f(x_1) \geq f(x_2)$, respectivamente,
6. **positiva**: si la función solo toma valores positivos (o no negativos); es decir, si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$,
7. **acotada**: si los valores de la función se encuentran dominados por una constante; es decir, si existe $M > 0$ tal que $M \geq |f(x)|$ para todo $x \in X$,

Ejemplo. *La razón del nombre par o impar, se debe a que las potencias pares ($1, x^2, x^4, \ldots$) e impares ($x, x^3, \ldots$) son funciones pares e impares, respectivamente.*

Ejercicio. *¿Cuáles otras funciones pares e impares conoce? ¿Cuáles funciones que conoce son monótonas y cuáles no? ¿Cuáles funciones que conoce son acotadas y cuáles no?*

En esta sesión vamos a considerar ecuaciones que involucran funciones, a las cuales vamos a llamar **ecuaciones funcionales**.

Problema 1. *Sea X un conjunto con un número impar de elementos y sea $f : X \to X$ una función tal que $f(f(x)) = x$. Demuestre que f tiene un punto fijo, es decir, que existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Sugerencia: Antes de empezar a resolver el problema, intente lo siguiente. Primero, haga un caso particular con X pequeño, digamos $X = \{1, 2, 3\}$, para convencerse que el problema es cierto. Segundo, intente entender por qué es relevante la hipótesis de que el número de elementos sea impar; intente encontrar un contraejemplo al problema en el caso en que la cantidad fuera par.

Ejercicio. *La condición $f(f(x)) = x$ no es tan extraña como parece; por ejemplo, $1-x$, $1/x$, $\sqrt{1-x^2}$ la satisfacen (precaución: hay que tener un poco de cuidado con los dominios). Encuentre condiciones sobre a, b, c, d de manera que si $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$, entonces $f(f(x)) = x$.*

Problema 2. *Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que*

1. $f(2) = 2$,
2. $f(mn) = f(m)f(n)$ *para todo* $m, n \in \mathbb{Z}^+$,
3. $f(m) < f(n)$ *si* $m < n$.

2 Algunas ideas

No hay en general un método para resolver las distintas ecuaciones funcionales. En algunos casos se puede decir algo al respecto, como veremos en la siguiente sección, pero por lo general las soluciones dependen de cada problema en particular. Sin embargo, hay varias ideas comunes que resultan útiles al intentar resolver estos problemas. Puede encontrar una lista de más extensiva de sugerencias en las referencias [1] (ver p.1-2) o [2] (ver p.91-92, *Some closing heuristics*).

1. Calcule algunos valores especiales de la función ($f(0)$, $f(1)$, etc.).
2. Determine alguna solución de la ecuación y úsela para reescribir el problema (por ejemplo, restándola de la función original).
3. Estudie la homogeneidad de la ecuación para ver si se admiten más múltiplos como soluciones.
4. Aproveche la simetría o antisimetría de la ecuación.
5. Analice las propiedades de la función (in/sobre/bi-yectividad, monotonía, paridad, etc.).
6. Busque los puntos fijos o ceros de la función.

Problema 3 (Olimpiada Británica 2009, primera ronda)**.** *Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen $f(x)f(y) = f(x + y) + xy$.*

Problema 4 (IMO 2019)**.** *Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Z}$ se cumple que*

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

3 Ecuación de Cauchy

La ecuación de Cauchy,

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

es un ejemplo interesante de una ecuación funcional. Primero vemos que $f(x) = x$ es una solución de la ecuación. Notamos además que la ecuación es **homogénea** (es decir, si f es una solución, entonces cf también lo es para cualquier constante c). Por lo tanto, obtenemos la familia de soluciones $f(x) = cx$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Sin embargo, la simplicidad de la ecuación encierra una cantidad mucho mayor de soluciones, las cuales no son fáciles de describir[1].

3.1 Sobre los racionales

A pesar de la advertencia anterior sobre las soluciones "raras" que podría tener esta ecuación procedemos a explorar el problema. Tomando $x = y = 0$ en (1) obtenemos que

$$f(0) = f(0) + f(0) \Longrightarrow f(0) = 0.$$

Sabemos además que hay infinitas soluciones de la forma $f(x) = cx$, por lo que determinar el valor de $f(1)$ es una tarea inútil. Llamemos $f(1) = c$ e intentemos calcular otros valores basados en esto. Tomando $x = y = 1$ en (1) obtenemos que

$$f(2) = f(1) + f(1) = c + c = 2c.$$

Con $x = 2$, $y = 1$, obtenemos que

$$f(3) = f(2) + f(1) = 2c + c = 3c.$$

Procediendo de la misma forma[2], concluimos que $f(n) = cn$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. Recogemos las ideas anteriores en la siguiente proposición que usaremos más adelante; la prueba es exactamente igual que el argumento anterior.

Proposición 3.1. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que $f(nx) = nf(x)$.*

Ya conocemos los valores de f sobre los enteros positivos. El paso siguiente natural es determinar el valor de la función sobre *todos* los enteros. Para determinar el valor en -1 podemos observar que $0 = 1 + (-1)$, de manera que

$$0 = f(0) = f(1) + f(-1) \Longrightarrow f(-1) = -f(1) = -c.$$

Esto en conjunto con Proposición 3.1 implica que, si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$f(-n) = nf(-1) = n \cdot (-c) = -cn,$$

es decir, tenemos que $f(n) = cn$ para $n \in \mathbb{Z}$ (esto es una extensión del resultado anterior).

El último paso consiste en extender esto para los racionales. Por ejemplo, nos gustaría calcular $f(1/2)$. Usando que $1 = 1/2 + 1/2$ obtenemos que

$$c = f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{c}{2}.$$

De igual manera, para calcular $f(1/3)$ podemos usar que

$$c = f(1) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \left[f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)\right] = 3f\left(\frac{1}{3}\right) \Longrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{c}{3}.$$

[1] Si esto llama su atención, puede ahondar un poco más en [2], ver p.93-96

[2] Una manera de "formalizar" esto es recurriendo al **principio de inducción**, pero eso queda para otro momento.

En general, para calcular $f(p/q)$ podemos usar Proposición 3.1: tenemos que

$$qf\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = f(p) = cp,$$

donde en el último paso usamos que $f(p) = cp$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Dividiendo por q obtenemos que $f(p/q) = cp/q$, con lo que hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 3.2. *Si f es una función que satisface la ecuación de Cauchy, entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.*

Comentario. *El resultado de Proposición 3.2 no establece ninguna información sobre los valores de la función en los números irracionales.*

Problema 5. *Determine todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tales que $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$.*

3.2 Algunas condiciones para extender a los reales

Ahora estudiamos condiciones para extender la igualdad $f(x) = cx$, válida para $x \in \mathbb{Q}$ por Proposición 3.2, a todo $x \in \mathbb{R}$. Las condiciones que vamos a considerar van a utilizarse en conjunto con el hecho de que cualquier número real puede ser aproximado arbitrariamente por racionales; es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $N \in \mathbb{Z}^+$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $|x - r| < 1/N$. Intuitivamente, esto quiere decir que, a pesar de que los números racionales dejan “huecos” sobre la recta real, estos “huecos” no pueden ser grandes.

Teorema 3.3. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación de Cauchy y es monótona (ya sea, creciente o decreciente), entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Proof. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que f es creciente (si fuera decreciente, entonces probamos el resultado para $-f$). Por Proposición 3.2 sabemos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(r) = cr$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Consideremos $x \in \mathbb{R}$. Si r es cualquier número racional *menor* que x, entonces por la monotonía de f tenemos que $cr = f(r) \leq f(x)$. En particular, tomando r muy cercano a x, obtenemos que cr es muy cercano a cx y así, $cx \leq f(x)$. De la misma manera, si r es cualquier número racional *mayor* que x, entonces $cr = f(r) \geq f(x)$, con lo que volvemos a concluir que $cx \geq f(x)$. Las dos desigualdades implican que $f(x) = cx$, como queríamos probar. □

Corolario 3.4. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación de Cauchy y $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$, entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Proof. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \geq y$. Luego, tenemos que

$$f(x) = f(x - y) + f(y) \geq f(y),$$

donde usamos la ecuación de Cauchy en el primer paso y el hecho que $f(x - y) \geq 0$ (pues $x - y \geq 0$). Esto prueba que f es creciente, y el resultado se concluye de Teorema 3.3.

□

3.3 Algunas variaciones

Ejercicio. *Para la ecuación*

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \textit{con } f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,$$

encuentre las soluciones análogas a las funciones lineales del problema de Cauchy. Establezca los resultados análogos a Proposición 3.2, Teorema 3.3, Corolario 3.4.

Ejercicio. *Para la ecuación*

$$f(x + y) = f(x)f(y), \quad \textit{con } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,$$

encuentre las soluciones análogas a las funciones lineales del problema de Cauchy. Establezca los resultados análogos a Proposición 3.2, Teorema 3.3, Corolario 3.4.

Problema 6 (IMO 83)**.** *Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que $f(xf(y)) = yf(x)$ y $f(x) \to 0$ si $x \to +\infty$.*

4 Más problemas

Problema 7 (Olimpiada Británica 2008/9, segunda ronda)**.** *Determine todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que satisfacen*

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)[f(x^2) + f(y^2) - f(xy)].$$

Problema 8 (IMO 82)**.** *Sea* $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$ *tal que* $f(2) = 0$*,* $f(3) > 0$*,* $f(9999) = 3333$ *y*

$$f(m + n) - f(m) - f(n) \in \{0, 1\}.$$

Halle $f(1982)$*.*

Problema 9 (IMO 87)**.** *Demuestre que no existe* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $f(f(n)) = n + 1987$*.*

Problema 10 (IMO 2002)**.** *Hallar todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz),$$

para cualesquiera reales x, y, z, t*.*

Problema 11. *Sean* $g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *con* $g(x) > 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$*. Encuentre todas las funciones* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *(en términos de* g *y* h*) que satisfacen*

$$f(x) + g(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = h(x).$$

Sugerencia: Si $y = 1/x$, escriba x en términos de y y reescriba la ecuación en términos de y. ¿Qué observa?

Problema 12. *Sean* $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *con* $g(x) > 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Encuentre todas las funciones* $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ *(en términos de* g *y* h*) que satisfacen*

$$f(x) + g(x) f\left(\frac{2x - 3}{x - 2}\right) = h(x).$$

Sugerencia: Si $y = (2x - 3)/(x - 2)$, escriba x en términos de y y reescriba la ecuación en términos de y. ¿Qué observa?

5 Soluciones

Problema 1. *Sea* X *un conjunto con un número impar de elementos y sea* $f : X \to X$ *una función tal que* $f(f(x)) = x$*. Demuestre que* f *tiene un punto fijo, es decir, que existe* $x_0 \in X$ *tal que* $f(x_0) = x_0$*.*

Solución. Es instructivo tratar de entender las hipótesis del problema, que en nuestro caso corresponde a entender por qué el conjunto X debe tener un número impar de elementos. Si $X = \{1, 2\}$, entonces un contraejemplo puede estar dado por $f(1) = 2$ y $f(2) = 1$, ya que $f(f(1)) = 1$ y $f(f(2)) = 2$, pero f no tiene puntos fijos. Con $X = \{1, 2, 3, 4\}$ podemos hacer lo mismo, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$, y en general para cualquier conjunto con una cantidad par de elementos podemos construir el contraejemplo. Ahora entendemos un poco mejor el problema y esperamos que esto nos ayude a resolver el problema en el caso impar.

Lo primero es observar que la condición $f(f(x)) = x$ implica que f es biyectiva con inversa f. Supongamos por contradicción que f no tiene puntos fijos. La idea siguiente es agrupar los elementos de X en parejas (como hicimos en la construcción del contraejemplo). Para todo $x \in X$ consideramos el conjunto $C_x = \{x, f(x)\}$, el cual tiene dos elementos ya que $f(x) \neq x$ (porque estamos suponiendo que f no tiene puntos fijos). Supongamos que hay dos conjuntos C_x y C_y, con $y \neq x$, que se intersecan. Hay tres posibilidades para su intersección:

$$x = f(y), \quad y = f(x), \quad f(x) = f(y).$$

En el primer caso, obtenemos que $y = f(f(y)) = f(x)$, por lo que $C_x = C_y$. El segundo caso es análogo. El último caso no es posible porque f es biyectiva y supusimos que $y \neq x$. Por lo tanto, si los conjuntos C_x y C_y se intersecan, entonces deben ser iguales. Esto nos da la partición buscada en parejas de X, pero esto no es posible ya que X tiene una cantidad impar de elementos, y por lo tanto se obtiene una contradicción; es decir, f debe tener algún punto fijo, como queríamos probar. $\square$

Problema 2. *Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que*

1. $f(2) = 2$,
2. $f(mn) = f(m)f(n)$ *para todo* $m, n \in \mathbb{Z}^+$,
3. $f(m) < f(n)$ *si* $m < n$.

Solución. Una función que resuelve el problema es $f(m) = m$. Vamos a estudiar si esta es la única posible. Empezamos por determinar algunos valores de la función. Tomando $n = 1$ en la condición, obtenemos que $f(m) = f(m)f(1)$, y así $f(1) = 1$ (ya que $f(m) \neq 0$); esto también pudimos haberlo deducido de $f(1) < f(2) = 2$.

Podemos determinar también que $f(4) = f(2)f(2) = 4$, $f(8) = f(4)f(2) = 4 \cdot 2 = 8$, y en general[3] obtenemos que $f(2^n) = 2^n$. Podemos usar lo anterior para obtener algunos valores intermedios: sabemos que

$$2 = f(2) < f(3) < f(4) = 4,$$

por lo que $f(3) = 3$. De la misma manera, como

$$4 = f(4) < f(5) < f(6) < f(7) < f(8) = 8,$$

entonces debemos tener $f(5) = 5$, $f(6) = 6$ y $f(7) = 7$. En general, para cualquier $m > 2$ existe n tal que $2^n < m < 2^{n+1}$. Usando que $f(2^n) = 2^n$, $f(2^{n+1}) = 2^{n+1}$ y procediendo como antes, concluimos que $f(m) = m$. □

[3]De nuevo, aquí podemos usar el principio de inducción.

Problema 3 (Olimpiada Británica 2009, primera ronda). *Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen $f(x)f(y) = f(x+y) + xy$.*

Solución. Una primera observación es que $f(x) = 1 + x$ es una solución del problema; en efecto,

$$(1+x)(1+y) = 1 + x + y + xy = [1 + (x+y)] + xy.$$

Vamos a determinar si esta es la única solución posible. Primero intentamos determinar algunos valores particulares: tomando $y = 0$ obtenemos que

$$f(x)f(0) = f(x),$$

por lo que $f(x) \equiv 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ o $f(0) = 1$. Sin embargo, si $f \equiv 0$ entonces no se puede cumplir la igualdad $f(x)f(y) = f(x+y)+xy$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto debemos tener $f(0) = 1$. Ahora, podemos usar este valor para introducir en $x + y$, es decir, podemos tomar $y = -x$. Así obtenemos que

$$f(x)f(-x) = f(0) + x \cdot (-x) = 1 - x^2.$$

El lado derecho se anula para $x = \pm 1$. Tomando $x = 1$ obtenemos que

$$f(1)f(-1) = 0,$$

por lo que $f(1) = 0$ o $f(-1) = 0$. Supongamos que $f(1) = 0$. Tomando $y = 1$ en la ecuación original obtenemos que

$$0 = f(x)f(1) = f(x+1) + x,$$

o bien, $f(x+1) = -x$. Reescribiendo, $t = x+1$, concluimos que $f(t) = -(t-1) = 1-t$. [Observemos que esta solución no fue la que obtuvimos al principio.] Finalmente, verificamos que esta es una solución del problema:

$$(1-x)(1-y) = 1 - x - y + xy = [1 - (x+y)] + xy.$$

Ahora consideramos el caso $f(-1) = 0$. Tomando $y = -1$ en la ecuación original obtenemos que

$$0 = f(x)f(-1) = f(x-1) - x,$$

o bien, $f(x-1) = x$. Reescribiendo, $t = x - 1$, concluimos que $f(t) = 1 + t$. Así concluimos que las soluciones del problema son $f(x) = 1 + x$ y $f(x) = 1 - x$. $\square$

Problema 4 (IMO 2019). *Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Z}$ se cumple que*

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Solución. Una primera observación es que $f(n) = 2n$ es una solución del problema. Notamos además que el lado derecho es simétrico con respecto a a, b, pero el lado izquierdo no lo es. Vamos a aprovechar esta antisimetría intercambiando a y b:

$$f(2b) + 2f(a) = f(f(b+a)).$$

Por lo tanto, $f(2a) + 2f(b) = f(2b) + 2f(a)$, o bien, $f(2a) - 2f(a) = f(2b) - 2f(b)$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Z}$. En particular, $f(2a) - 2f(a) = f(0) - 2f(0) = -f(0)$, o bien, $f(2a) = 2f(a) - f(0)$. Sustituyendo en la ecuación original obtenemos que

$$2f(a) + 2f(b) - f(0) = f(f(a+b)).$$

Ahora, tomando $b = 0$, se obtiene que $2f(a) + f(0) = f(f(a))$. Por lo tanto,

$$2f(a) + 2f(b) - f(0) = f(f(a+b)) = 2f(a+b) + f(0),$$

de donde se sigue que

$$f(a) + f(b) = f(a+b) + f(0),$$

o bien,

$$f(a+b) - f(a) = f(b) - f(0).$$

En particular, para $b = 1$ se tiene que $f(a+1) - f(a) = f(1) - f(0)$. Esto quiere decir que los incrementos son constantes y por lo tanto la función es lineal. Luego, $f(a) = Ca + D$. Sustituyendo en la ecuación original obtenemos que

$$f(2a) + 2f(b) = (2Ca + D) + 2(Cb + D) = 2C(a+b) + 3D,$$

$$f(f(a+b)) = C[C(a+b) + D] + D = C^2(a+b) + (CD + D).$$

Puesto que la igualdad vale para cualesquiera a, b, entonces debemos tener que

$$2C = C^2, \quad 3D = CD + D \iff C \in \{0, 2\}, \quad (C-2)D = 0.$$

Por lo tanto, si $C = 0$ entonces $D = 0$ y así se obtiene la función $f \equiv 0$. Si $C = 2$, la igualdad vale para cualquier valor de D; por lo tanto, se obtiene que $f(n) = 2n + D$ es una solución para todo $D \in \mathbb{Z}$. $\square$

Problema 5. *Determine todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tales que $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$.*

Solución. Empezamos observando que $f(x) = x^2$ es una posible solución. Notamos también que la ecuación tiene cierta semejanza con la ecuación de Cauchy. Podemos usar la solución que construimos para considerar una nueva función, $g(x) := f(x) - x^2$, es decir, $f(x) = x^2 + g(x)$. Podemos convertir la ecuación funcional para f en una para g de la siguiente forma:

$$(x+y)^2 + g(x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy = [x^2 + g(x)] + [y^2 + g(y)] + 2xy,$$

con lo que se obtiene

$$g(x+y) = g(x) + g(y),$$

es decir, la ecuación de Cauchy. Sabemos que las soluciones (sobre $\mathbb{Q}$) están dadas por $g(x) = cx$ para alguna constante $c \in \mathbb{R}$. En nuestro caso sabemos que g toma valores racionales, porque $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ y $x^2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, por lo tanto, debemos tener que $c \in \mathbb{Q}$. Así concluimos que todas las soluciones al problema son las funciones de la forma

$$f(x) = x^2 + cx, \quad c \in \mathbb{Q}.$$

$\square$

Problema 6 (IMO 83)**.** *Encuentre todas las funciones* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *tales que* $f(xf(y)) = yf(x)$ *y* $f(x) \to 0$ *si* $x \to +\infty$.

Solución. Empezamos por sustituir algunos valores especiales. Tomando $x = 1$ obtenemos que $f(f(y)) = yf(1)$ y tomando $y = 1$ obtenemos que $f(yf(1)) = f(y)$. Por lo tanto,

$$yf(1) = f(f(y)) = f(f(yf(1))),$$

es decir, $f(f(z)) = z$ si $z = yf(1)$. Como $f(1) \neq 0$, entonces la igualdad $f(f(z)) = z$ vale para todo $z \in \mathbb{R}^+$. Comparando esto con $f(f(y)) = yf(1)$ deducimos que $f(1) = 1$.

Ahora bien, tomando $y = f(z)$ en la ecuación original, y usando que $f(f(z)) = z$, obtenemos que $f(xz) = f(x)f(z)$. Nos gustaría una condición como la de Teorema 3.3 o Corolario 3.4 para poder obtener que $f(x) = x^c$ para alguna constante c. En este caso, el resultado análogo a Proposición 3.1 es que $f(x^N) = [f(x)]^N$ para todo entero positivo N. Si $x > 1$, entonces $x^N \to +\infty$ cuando $N \to +\infty$. Usando la condición del problema obtenemos que

$$\lim_{N\to+\infty} [f(x)]^N = \lim_{N\to+\infty} f(x^N) = 0,$$

lo que implica que $f(x) < 1$ si $x > 1$. Esto y la condición $f(xy) = f(x)f(y)$ implica que f es decreciente. Por lo tanto, concluimos que $f(x) = x^c$ para algún $c < 0$. Sustituyendo en la condición original obtenemos que

$$f(xf(y)) = (xy^c)^c = x^c y^{c^2}, \quad yf(x) = x^c y,$$

de donde $c^2 = 1$. Como $c < 1$ entonces concluimos que $c = -1$ y así la única solución posible es $f(x) = 1/x$. $\square$

Problema 7 (Olimpiada Británica 2008/9, segunda ronda). *Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen*

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)[f(x^2) + f(y^2) - f(xy)].$$

Solución. Primero observamos que $f(x) = x$ es una solución del problema. Notamos también que el problema es homogéneo con respecto a f, por lo que tenemos la familia de soluciones $f(x) = cx$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Vamos a estudiar si estas son las únicas soluciones.

Empezamos por tomar valores especiales. Tomando $y = 0$ resulta que

$$f(x^3) + f(0) = xf(x^2).$$

En particular, tomando $x = 0$ en la ecuación anterior resulta que $f(0) = 0$. Por lo tanto, tenemos que $f(x^3) = xf(x^2)$, y así la ecuación original se puede reescribir como

$$xf(x^2) + yf(y^2) = (x + y)[f(x^2) + f(y^2) - f(xy)].$$

Expandiendo y cancelando los términos comunes, resulta que

$$(x + y)f(xy) = yf(x^2) + xf(y^2). \tag{2}$$

En la ecuación original podemos observar que el lado derecho se anula si $x + y = 0$, es decir, si $y = -x$. Por lo tanto, $f(-x^3) = -f(x^3)$. Como $x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es sobreyectiva, entonces concluimos que $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir f es impar. Tomando $y = -z$ en (2) se tiene que

$$(x - z)f(-xz) = -zf(x^2) + xf(z^2) \Longrightarrow -(x - z)f(xz) = -zf(x^2) + xf(z^2).$$

Combinando esto con (2) concluimos que

$$yf(xy) = xf(y^2), \quad xf(xy) = yf(x^2).$$

En particular, para $y = 1$ concluimos que $f(x) = xf(1)$, que es lo mismo que decir $f(x) = cx$, como habíamos observado al principio del problema. $\square$

Problema 8 (IMO 82). *Sea* $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$ *tal que* $f(2) = 0$, $f(3) > 0$, $f(9999) = 3333$ *y*

$$f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0, 1\}.$$

Halle $f(1982)$.

Solución. Primero observamos que la condición implica que f es creciente:

$$f(m+1) - f(m) - f(1) \geq 0 \Longrightarrow f(m+1) \geq f(m) + f(1) \geq f(m),$$

pues $f(1) \geq 0$ (ya que $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$). En particular, esto implica que $0 = f(2) \geq f(1) \geq 0$, por lo que $f(1) = 0$. De la condición tenemos también que

$$f(m+3) \geq f(m) + f(3).$$

En particular, tomando $m = 3, 6, 9, \ldots, 9996$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
f(6) &\geq f(3) + f(3), \\
f(9) &\geq f(6) + f(3), \\
&\vdots \qquad \vdots \\
f(9999) &\geq f(9996) + f(3).
\end{aligned}$$

Sumando estas $9996/3 = 3332$ desigualdades y cancelando los términos comunes, se obtiene que

$$3333 = f(9999) \geq f(3) + 3332 f(3) = 3333 f(3).$$

Esto implica que $f(3) \leq 1$ y por lo tanto $f(3) = 1$. Esto implica que todas estas desigualdades deben ser igualdades, porque en caso de haber una de ellas que sea estricta se obtendría $3333 > 3333f(3) = 3333$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $f(3n) = n$ para $n = 1, 2, \ldots, 3333$.

Si $n \leq 3333$, entonces esto implica que

$$n = f(3n) \geq f(2n) + f(n) \geq [f(n) + f(n)] + f(n) = 3f(n),$$

por lo que $f(n) \leq n/3$. En particular, $f(1982) \leq 1982/3 < 661$. Además, $f(1982) \geq f(1980) = 660$, con lo que se concluye que $f(1982) = 660$. $\square$

Problema 9 (IMO 87)**.** *Demuestre que no existe* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $f(f(n)) = n + 1987$.

Solución. Supongamos que sí existe una solución a la ecuación. Podemos aplicar f a la ecuación y obtener

$$f(n + 1987) = f(f(f(n))) = f(n) + 1987,$$

lo que implica que $f(1987q + k) = 1987q + f(k)$ para $0 \leq k < 1987$. Esto sugiere que consideremos $f(k) = 1987q(k) + r(k)$, con $0 \leq r(k) < 1987$. Luego, si $n = 1987q + k$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(f(n)) &= f(1987q + f(k)) \\ &= f(1987(q + q(k)) + r(k)) = 1987(q + q(k)) + f(r(k)) = 1987(q + q(k) + q(r(k))) + r(r(k)). \end{aligned}$$

Por la condición del problema esto implica que $q(k) + q(r(k)) = 1$ y $r(r(k)) = k$. Como el conjunto $\{0, 1, \ldots, 1986\}$ tiene una cantidad impar de elementos, por el **Problema 1** tenemos que r debe tener un punto fijo, es decir, $r(k_0) = k_0$ para algún $k_0 \in \{0, 1, \ldots, 1986\}$. Esto nos da que $2q(k_0) = q(k_0) + q(r(k_0)) = 1$, lo cual no es posible, con lo que se obtiene una contradicción, y así concluye el problema. $\square$

Problema 10 (IMO 2002)**.** *Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz),$$

para cualesquiera reales x, y, z, t.

Solución. Empezamos tomando $t = 0$ y observamos que

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(0)) = f(xy) + f(yz).$$

También, si tomamos $x = z$, $y = 0$, entonces resulta que $4f(x)f(0) = 2f(0)$. Esto implica que $f(0) = 0$ o $f \equiv 1/2$. De hecho, el caso $f \equiv 1/2$ es una solución del problema. Ahora podemos suponer que $f(0) = 0$. Si tomamos $z = t = 0$ en la ecuación original, entonces obtenemos que

$$f(x)f(y) = f(xy),$$

que es una de las variaciones de la ecuación de Cauchy que estudiamos antes. Nos gustaría encontrar alguna condición sobre f como las de Teorema 3.3 o Corolario 3.4 que implique que $f(x) = x^c$ para algún $c \in \mathbb{R}$. La ecuación funcional implica que $(f(1))^2 = f(1)$, de manera que $f(1) = 1$ o $f(1) = 0$. Si $f(1) = 0$, entonces $f(x) = f(x)f(1) = 0$. Notemos que esta es otra solución posible. Ahora podemos suponer que $f(1) = 1$.

Si tomamos $x = y = 0$ and $z = 1$ entonces resulta que $f(t) = f(-t)$. Tomamos $x = t$ y $y = z$ para tener que $xy - zt = 0$, y así obtenemos que

$$(f(x) + f(y))^2 = f(x^2 + y^2).$$

Esto implica que $f(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Como f es par, entonces esto implica que $f(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego,

$$f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2 \geq [f(x)]^2 = f(x^2),$$

por lo que f es creciente en $(0, +\infty)$. Esta condición y la ecuación funcional de f implican que si $x > 0$, entonces $f(x) = x^c$ para algún $c \geq 0$. La ecuación $(f(1) + f(1))^2 = f(2)$ implica que $c = 2$. Como $f(0) = 0$ y f es par, se concluye que $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es fácil comprobar que esta es una solución al problema. Así concluimos que las soluciones a la ecuación son

$$f(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv \frac{1}{2}, \quad f(x) = x^2.$$

$\square$

Problema 11. *Sean $g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con $g(x) > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (en términos de g y h) que satisfacen*

$$f(x) + g(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = h(x).$$

Solución. Sea $y = 1/x$, de manera que $x = 1/y$. De esta manera, la ecuación se reescribe como

$$f\left(\frac{1}{y}\right) + g\left(\frac{1}{y}\right)f(y) = h\left(\frac{1}{y}\right).$$

Esta ecuación y la original nos dan un sistema de dos ecuaciones para $f(x)$ y $f(1/x)$:

$$f(x) + g(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = h(x), \quad f\left(\frac{1}{x}\right) + g\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = h\left(\frac{1}{x}\right).$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera obtenemos que

$$f(x) + g(x)\left[h\left(\frac{1}{x}\right) - g\left(\frac{1}{x}\right)f(x)\right] = h(x),$$

que podemos reescribir como

$$\left[g(x)g\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right]f(x) = g(x)h\left(\frac{1}{x}\right) - h(x).$$

Usando que $g > 1$ vemos que $g(x)g(1/x) - 1 > 0$ y así concluimos que

$$f(x) = \frac{g(x)h(\frac{1}{x}) - h(x)}{g(x)g(\frac{1}{x}) - 1}.$$

□

Problema 12. *Sean $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ (en términos de g y h) que satisfacen*

$$f(x) + g(x) f\left(\frac{2x-3}{x-2}\right) = h(x).$$

Solución. La idea es similar a la del problema anterior: si $y = (2x-3)/(x-2)$, entonces $xy - 2y = 2x - 3$, por lo que $x = (2y-3)/(y-2)$. Si consideramos la función $\phi(x) = (2x-3)/(x-2)$, entonces lo anterior implica que $\phi^{-1}(x) = \phi(x)$, o bien $\phi(\phi(x)) = x$. De esta forma volvemos a tener un sistema de dos ecuaciones para $f(x)$ y $f(\phi(x))$:

$$f(x) + g(x) f(\phi(x)) = h(x), \quad f(\phi(x)) + g(\phi(x)) f(x) = h(\phi(x)).$$

Al igual que antes podemos resolver por sustitución,

$$f(x) + g(x)[h(\phi(x)) - g(\phi(x)) f(x)] = h(x),$$

y así concluimos que

$$f(x) = \frac{g(x)h(\phi(x)) - h(x)}{g(x)g(\phi(x)) - 1}.$$

□

References

[1] M. Radovanović, *Functional Equations*, The IMO Compendium, `imomath.com/index.php?options=338&lmm=0`

[2] C.G. Small, *Functional Equations and How to Solve Them*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2007.