Notas de geometría

Daniel Campos Salas

(Material en construcción)

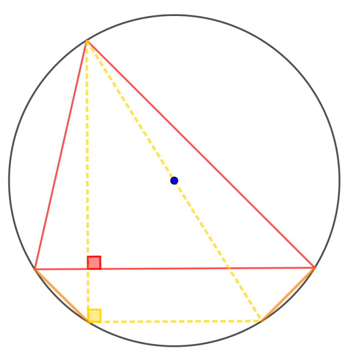
Contents

1 Notación

2 Propiedades básicas de puntos especiales

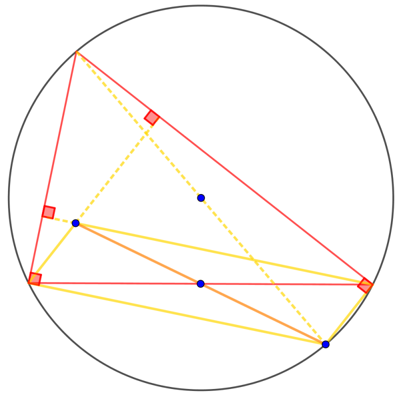
2.1 Altura y diámetro

Teorema 2.1. *Sea ABC un triángulo. La altura y el diámetro por A forman ángulos iguales con los lados AB y AC.*

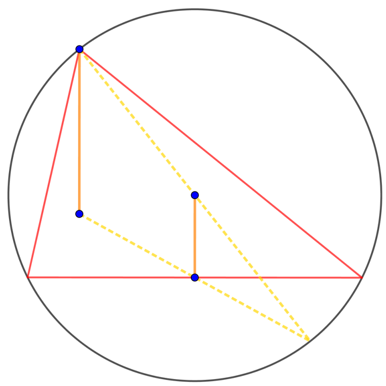


2.2 Punto diametralmente opuesto, punto medio y ortocentro

Teorema 2.2. *Sea ABC un triángulo con ortocentro H y circuncírculo Γ. Sea A' el punto diametralmente opuesto a A en Γ y M el punto medio de BC. Entonces A', M y H son colineales y M es también el punto medio del segmento $A'H$.*

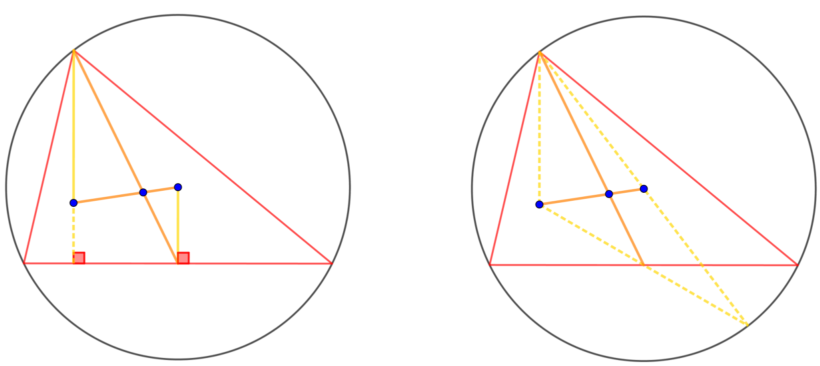


Corolario 2.3. *Sea ABC un triángulo con ortocentro H y circuncentro O. Si M es el punto medio de BC, entonces $AH = 2OM$.*



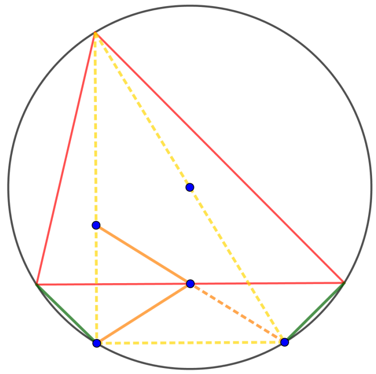
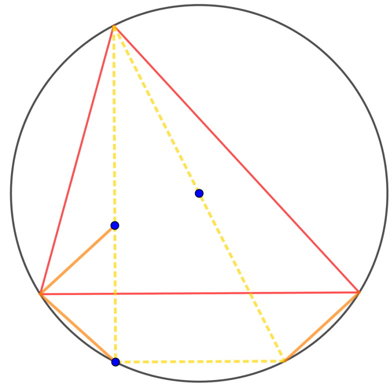
2.3 Recta de Euler

Teorema 2.4. *Sea ABC un triángulo con ortocentro H, baricentro G y circuncentro O. Entonces H, G y O están alineados, G pertenece al interior del segmento OH y $HG = 2GO$.*



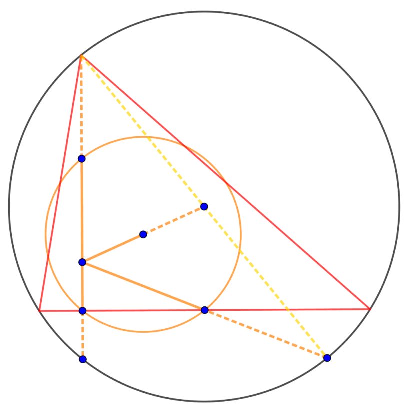
2.4 Reflexión del ortocentro

Teorema 2.5. *Sea ABC un triángulo con ortocentro H y circuncírculo Γ. Las reflexiones de H sobre cada uno de los lados del triángulo pertenecen a Γ.*

2.5 Círculo de los nueve puntos

Teorema 2.6. *Sea ABC un triángulo con ortocentro H y circuncentro O. Existe un círculo que pasa por los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro H y los vértices. El centro de este círculo es el punto medio del segmento OH y el radio es la mitad del circunradio del triángulo ABC.*



2.6 Teorema de Feuerbach

3 Problemas

Ejercicio. *Demuestre que el centro del círculo de los nueve puntos es el circuncentro del triángulo medial.*

Ejercicio. *Demuestre que el circuncentro de un triángulo es el centro del círculo de los nueve puntos del triángulo formado por los excentros.*

Ejercicio. *Determine cuándo el círculo de los nueve puntos es tangente a uno de los lados del triángulo.*

Ejercicio. *Determine cuándo la recta de Euler pasa por uno de los vértices del triángulo.*

Ejercicio. *Determine cuándo la recta de Euler pasa por el punto medio de uno de los lados del triángulo.*

Ejercicio. *Determine cuándo la recta de Euler es perpendicular a una de las bisectrices del triángulo.*

Problema 1 (OIM 1997). *En un triángulo acutángulo ABC, sean AE y BF las alturas y H su ortocentro. La reflexión de la recta AE con respecto a la bisectriz del ángulo BAC y la reflexión de la recta BE con respecto a la bisectriz del ángulo ABC se intersecan en el punto O. Las rectas AE y AO intersecan por segunda vez al circuncírculo del triángulo ABC en los puntos M y N, respectivamente. Sea P la intersección de BC con HN, R la intersección de BC con OM, y S la intersección de HR con OP. Demuestre que $AHSO$ es un paralelogramo.*

Problema 2 (A. Gravilyuk, IMO 2008). *Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC. El círculo Γ_A, con centro en el punto medio de BC y que pasa por H, interseca al lado BC en los puntos A_1 y A_2. De manera similar se definen los puntos B_1, B_2, C_1 y C_2. Demuestre que los seis puntos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2 son cocíclicos.*

References

[1] H.S.M. Coxeter, S. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, 1967.