Suma de potencias

Daniel Campos Salas

(Material en construcción)

Contents

1 Introducción

Vamos a estudiar sumas de potencias, es decir, sumas de la forma

$$S(n,k) := 1^k + 2^k + \ldots + n^k.$$

Ejercicio. *Encuentre* $S(n,0)$.

Cuenta la leyenda que en la escuela, con el fin de mantenerlo ocupado por un buen tiempo, se le asignó a Gauss la tarea de calcular la suma

$$1 + 2 + \ldots + 100.$$

Sorprendentemente, al cabo de un rato Gauss propuso la siguiente solución: si S denota la suma, entonces

$$\begin{array}{rcccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & 100 \\ S & = & 100 & + & 99 & + & \ldots & + & 1 \\ \hline 2S & = & 101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101, \end{array}$$

por lo que $S = 100 \cdot 101/2 = 5050$. Repitiendo el mismo argumento obtenemos en general que

$$S(n,1) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Ejercicio ([1])**.** *Use el método anterior, para probar que si* k *es impar, entonces* $n(n+1)$ *divide a* $2S(n,k)$.

Desafortunadamente, no es obvio cómo adaptar el truco anterior para generar las fórmulas de orden superior, y por lo tanto el objetivo de esta lección es dar un método para poder encontrar las fórmulas explícitas de las sumas $S(n,k)$, cuando k es un entero positivo.

2 Obteniendo la fórmula

2.1 Conjetura

Conocemos ya las fórmulas de $S(n,0)$ y $S(n,1)$, pero esto todavía parece insuficiente evidencia para realizar una conjetura decente con respecto a lo que la suma $S(n,k)$ debe ser. El siguiente ejercicio nos puede ayudar.

Ejercicio. *Calcule las sumas de los cubos, es decir $S(n,3)$, para varios valores de n. Intente determinar una fórmula explícita para $S(n,3)$.*

Con la experiencia obtenida, conjeturamos lo siguiente:

$$\boxed{\textit{Si } k \textit{ es un entero positivo, entonces la suma } S(n,k) \textit{ es un polinomio en } n \textit{ de grado } k+1.}$$

Antes de dedicarnos a la demostración, podríamos proveer más evidencia para convencernos que la conjetura es razonable. Burdamente, podemos acotar superiormente por

$$S(n,k) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k \leq n^k + n^k + \ldots + n^k = n^{k+1}.$$

Ahora, podemos acotar inferiormente usando la desigualdad de las medias potenciales: si $k \geq 1$, entonces

$$\left(\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n}\right)^{1/k} \geq \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} = \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2},$$

lo que implica que

$$S(n,k) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k \geq \frac{n^{k+1}}{2^k}.$$

Es decir, hemos acotado $S(n,k)$ entre dos polinomios (en n) de grado $k+1$, lo cual respalda la conjetura.

2.2 Derivación

Ahora procedemos con la obtención explícita del polinomio de la conjetura. Para hacer la exposición más clara, vamos a realizar el cálculo en el caso de la suma de cuadrados $S(n,2)$. Suponemos que existe un polinomio cúbico

$$P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d,$$

de manera que $S(n,2) = P(n)$ para todo entero positivo n. La sucesión de las sumas de los cuadrados se puede escribir recursivamente como

$$S(n+1,2) = S(n,2) + (n+1)^2,$$

o bien, $S(n+1,2) - S(n,2) = (n+1)^2$. Si la conjetura fuera cierta, entonces tendríamos que

$$P(n+1) - P(n) = (n+1)^2.$$

Sin embargo, la diferencia de los polinomios la podemos escribir como

$$P(n+1) - P(n) = a(3n^2 + 3n + 1) + b(2n + 1) + c = (3a)n^2 + (3a + 2b)n + (a + b + c).$$

Comparando estos coeficientes con los de $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3a & & & & & = & 1 \\ 3a & + & 2b & & & = & 2 \\ a & + & b & + & c & = & 1. \end{array}\right.$$

Con esto concluimos que $a = 1/3$, $b = 1/2$, $c = 1/6$. Es decir, hemos encontrado a, b y c de manera que se cumpla la igualdad

$$S(n+1,2) - S(n,2) = P(n+1) - P(n).$$

Finalmente, el valor de d lo podemos calcular tomando que $S(1,2) = 1$ sea igual a $P(1) = a+b+c+d$; es decir, $d = 0$.

2.3 Demostración

El resultado de la derivación anterior nos dice que hay que demostrar que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Esto se sigue casi inmediatamente por inducción. Sabemos que la igualdad es válida para $n = 1$ (pues así encontramos el valor del coeficiente d), es decir, sabemos que $S(1, 2) = P(1)$. Si suponemos que $S(n, 2) = P(n)$, entonces por el método de construcción de a, b y c, obtenemos que

$$S(n+1, 2) = [S(n+1, 2) - S(n, 2)] + S(n, 2) = [P(n+1) - P(n)] + P(n) = P(n+1),$$

con lo que concluye la inducción.

En general, la prueba de la conjetura sigue las mismas líneas, lo único que varía es el sistema de ecuaciones que hay que resolver. En todo caso, el sistema que queda por resolver es **triangular** y por lo tanto tiene una solución única.

3 Problemas

Ejercicio. *Lleve a cabo el método propuesto para obtener de manera alternativa la fórmula de $S(n, 3)$ que calculó anteriormente.*

Ejercicio. *Sea k un entero positivo, de manera que $S(n, k)$ es un polinomio de orden $k + 1$. Sea $P(n, k)$ este polinomio.*

1. *Encuentre el coeficiente principal de $P(n, k)$.*
2. *Encuentre el segundo coeficiente de $P(n, k)$.*
3. *Encuentre el último coeficiente de $P(n, k)$, es decir, calcule $P(0, k)$.*
4. *Demuestre que $(k + 1)!P(n, k)$ es un polinomio con coeficientes enteros.*
5. *Calcule $P(-1, k)$.*
6. *Si p es un primo y $0 < k < p - 1$, demuestre que p divide a $S(p - 1, k)$ y $S(p, k)$.*
7. *Si p es un primo y $p - 1$ no divide a k, demuestre que p divide a $S(p - 1, k)$ y $S(p, k)$.*

Problema 1 ([2])**.** *Demuestre que si k es impar, entonces $S(n, k)$ es un polinomio en $n(n + 1)$.*

Problema 2 (Teorema de Wolstenholme)**.** *Sea p un primo impar. Demuestre que p^2 divide al numerador de la fracción*

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}.$$

Problema 3 (China 1989-90)**.** *Una sucesión de enteros positivos $\{a_1, a_2, \ldots\}$ satisface que*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2,$$

para todo entero positivo n. Demuestre que $a_n = n$ para todo n.

Problema 4 (Canadá 2004)**.** *Sea p un primo impar. Demuestre que*

$$1^{2p-1} + 2^{2p-1} + \ldots + (p-1)^{2p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p^2}.$$

Problema 5 (K. Kedlaya, EE.UU., Prueba de Selección IMO 2002)**.** *Sea p un primo mayor o igual que 5. Para cada entero x, se define*

$$f_p(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{(px+k)^2}.$$

Pruebe que para todos los enteros positivos x, y, el numerador de $f_p(x) - f_p(y)$, cuando la fracción está simplificada, es divisible por p^3.

Problema 6 (OIM 2005)**.** *Sea $p > 3$ un número primo. Pruebe que si*

$$1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^p} = \frac{n}{m},$$

con m y n coprimos, entonces p^3 divide a n.

Problema 7 (O. Furdui, Harvard College Mathematics Review S08-3)**.** *Sea $k \geq 1$ un número natural. Halle todas las soluciones enteras a la ecuación diofántica*

$$x^{2k+1} + x^{2k} + \ldots + x^2 + x + 1 = y^{2k+1}.$$

4 Tópicos avanzados

4.1 Números de Bernoulli y fórmulas de Faulhaber

Vamos a dar una fórmula explícita para los coeficientes de las sumas, recurriendo a otra sucesión conocida. El argumento es simplemente una versión general del caso que desarrollamos anteriormente. Escribimos $S(n,k) = \sum_{l=0}^{k+1} c_l n^l$, para ciertos coeficientes $c_0, \ldots, c_{k+1}$. Procedemos al igual que antes,

$$(n+1)^k = S(n+1,k) - S(n,k) = \sum_{l=0}^{k+1} c_l((n+1)^l - n^l) = \sum_{l=1}^{k+1} c_l \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l}{j} n^j = \sum_{j=0}^{k} \frac{n^j}{j!} \sum_{l=j+1}^{k+1} \frac{l! c_l}{(l-j)!}.$$

Comparando los coeficientes de n^j en ambos lados para $j = 0, \ldots, k$, obtenemos las ecuaciones

$$\sum_{l=j+1}^{k+1} \frac{l! c_l}{(l-j)!} = \frac{k!}{(k-j)!}.$$

Notemos que este sistema ecuaciones es triangular, empezando desde $j = k$ hasta terminar en $j = 0$, lo que determina de manera única los valores de $c_{k+1}, \ldots, c_1$. Para $j = 0$ obtenemos que

$$c_1 + \ldots + c_{k+1} = 1,$$

y $1 = S(1,k) = \sum_{l=0}^{k+1} c_l$, por lo que $c_0 = 0$. Falta por determinar los restantes $k+1$ coeficientes. Queremos hacer que el sistema de ecuaciones tome cierta forma especial para poder resolverlo más fácilmente. Para esto definimos $d_l := l! c_l / k!$ y $e_m := d_{k-m+1}$, para $m = 0, 1, \ldots, k$. Las ecuaciones se convierten en

$$\sum_{l=j+1}^{k+1} \frac{e_{k-l+1}}{(l-j)!} = \frac{1}{(k-j)!}.$$

Renombrando algunos índices vemos que esto es equivalente a

$$\sum_{m=0}^{j} \frac{e_m}{(j-m+1)!} = \frac{1}{j!}.$$

La estructura de los coeficientes del lado izquierdo se pueden escribir como el resultado del producto de polinomios. Podemos considerar las funciones

$$E(t)=\sum_{j=0}^{k} e_j t^j, \qquad F(t)=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{(j+1)!}t^j, \qquad G(t)=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}t^j,$$

para así reescribir las ecuaciones como

$$E(t)F(t)=G(t)+t^{k+1}R(t),$$

para algún polinomio $R(t)$. Los polinomios $F(t)$ y $G(t)$ tienen una forma especial, y es más conveniente considerar las series de potencias (polinomios "infinitos")

$$F(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+1)!}t^j, \qquad G(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}t^j.$$

[Vamos a abusar de la notación y usar la misma de antes.] La serie $G(t)$ satisface que $G'(t)=G(t)$ y $G(0)=1$, por lo que $G(t)=e^t$. Además, $1+tF(t)=G(t)$, por lo que $F(t)=(e^t-1)/t$. Por lo tanto, obtenemos que

$$E(t)\cdot\frac{e^t-1}{t}=e^t+t^{k+1}R(t),$$

donde ahora $R(t)$ es también una serie de potencias. Podemos reescribir esto como,

$$E(t)=\frac{t}{e^t-1}(e^t+t^{k+1}R(t))=\frac{t}{1-e^{-t}}+t^{k+1}\widetilde{R}(t),$$

siendo

$$\widetilde{R}(t):=\frac{t}{e^t-1}R(t),$$

también una serie de potencias en $t=0$. Al escribir

$$\frac{t}{1-e^{-t}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l^+}{l!}t^l,$$

llamamos a B_l^+ el **l-ésimo número de Bernoulli**.

Comentario. *Los números de Bernoulli se obtienen al escribir*

$$1-e^{-t}=t-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}-\dots$$

y comparar los coeficientes de

$$(1-e^{-t})\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l^+}{l!}t^l$$

con t. Así, se obtiene que $B_1^+=1$, $B_2^+=1/2$, $B_3^+=1/6$, $B_4^+=0$, ….

Comentario. *Se puede considerar también la expansión en serie de potencias de*

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l^-}{l!}t^l.$$

Ejercicio. *Demuestre que $B_1^\pm=\pm1/2$ y para $k\neq1$ se tiene $B_k^+=B_k^-$.*

Ejercicio. *Demuestre que, excepto por B_2, los coeficientes pares de Bernoulli son iguales a 0.*

Por lo tanto obtenemos que $e_m = B_m^+/m!$, y así se sigue que

$$c_l = \frac{k!d_l}{l!} = \frac{k!B_{k-l+1}^+}{l!(k-l+1)!} = \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{l}B_{k-l+1}^+.$$

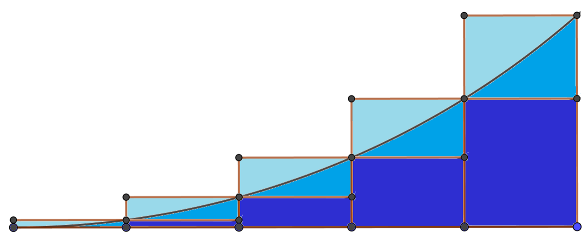
De esta forma concluimos que

$$\begin{aligned} S(n,k) &= \frac{1}{k+1}\sum_{l=1}^{k+1}\binom{k+1}{l}B_{k-l+1}^+ n^l \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}\binom{k+1}{l}B_l^+ n^{k-l+1} = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{k}{12}n^{k-1} + \dots. \end{aligned}$$

Estas fórmulas se conocen como **fórmulas de Faulhaber**.

4.2 Paseo por el cálculo integral

Considere la función $f(x) = x^k$, con k un entero positivo. Supongamos que queremos calcular el área entre la función y el eje x, con $x \in [a,b]$. Una forma de aproximar el área es dividir el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de igual tamaño y sumar las áreas de los rectángulos que tienen estos subintervalos como base. Es esperable que el área "real" sea el límite al hacer estos subintervalos muy pequeños, es decir, al tomar $n \to +\infty$.



La función $f(x) = x^k$ es creciente para $x \geq 0$. Por lo tanto, el área bajo la curva en un intervalo $[a,b]$ está acotada inferiormente por $(b-a)a^k$ y superiormente por $(b-a)b^k$. Consideremos el caso del intervalo $[0,1]$ y una partición de los intervalos en n subintervalos iguales. Por lo tanto, el área bajo la curva está acotada entre la suma inferior

$$L(n) = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{0}{n}\right)^k + \left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right),$$

y la suma superior

$$U(n) = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^k + \left(\frac{2}{n}\right)^k + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^k\right).$$

Ejercicio. *Calcule el límite de $L(n)$ y $U(n)$ cuando $n \to +\infty$ y obtenga el valor del área. Naturalmente, el límite depende de k.*

Ejercicio. *Repita el razonamiento anterior para calcular el área sobre el intervalo $[a,b]$.*

Un problema más difícil e interesante es encontrar un desarrollo asintótico de las sumas $S(n,k)$ cuando k no es un entero positivo. Intentando generalizar la experiencia previa, una conjetura razonable es que

$$S(n,k) = c_0 n^{k+1} + c_1 n^k + c_2 n^{k-1} + \dots,$$

siendo esta una suma infinita. El caso cuando $k = -1$ es muy interesante; en 1755, Euler demostró que

$$S(n,-1) = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \dots = \log n + \gamma - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_j^-}{jn^j},$$

donde a $\gamma = 0,577\ldots$ se le conoce como **constante de Euler-Mascheroni**. De momento, este problema se escapa de nuestro alcance, pero podemos acercarnos un poco con el siguiente ejercicio.

Ejercicio. *Consideramos la función $f(x) = 1/x$ con $x > 0$. El área entre la función y el eje x, en el intervalo $[a, b]$, es igual a $\log b - \log a$. La función $f(x) = 1/x$ es decreciente, de manera que en cada intervalo $[k, k+1]$ tenemos que*

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{k+1}.$$

Esto da que

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1) > \log n, \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq \int_1^{n} \frac{1}{x} dx = \log n,$$

lo que implica que

$$0 \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n \leq 1.$$

Defina la sucesión $\{a_1, a_2, \ldots\}$ por

$$a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n,$$

y observe que $a_n \geq 0$.

1. *Use la desigualdad $x \geq \log(1 + x)$, válida para $x > -1$, para mostrar que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.*

2. *Concluya que la sucesión es convergente; el número al que converge es la constante γ (esta se puede tomar como la definición de la constante).*

References

[1] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Problem Books in Mathematics, Springer, 1998.

[2] K. Hardy, K.S. Williams, *The Green Book of Mathematical Problems*, Dover Publications, 2013.