

Lista de problemas 1

Mayo 2020

Problema 1. Pruebe que si a, b, c son números reales positivos, entonces:

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

Problema 2. Determine el mayor entero positivo n , tal que n no puede ser escrito como la suma de tres enteros mayores a 1 que son primos relativos dos a dos.

Problema 3. Se tienen dos triángulos rectángulos, de modo que el incírculo del primero es igual al circuncírculo del segundo. Sean S y S' las áreas del primer y del segundo triángulo, respectivamente. Pruebe que:

$$\frac{S}{S'} \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

Problema 4. Pruebe que para todo entero positivo n , se puede encontrar una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ de manera que el promedio de cualesquiera dos enteros distintos no aparece en medio de ellos.

Por ejemplo, si se tiene $n = 4$, $\{1, 3, 2, 4\}$ sirve, mientras que $\{1, 4, 2, 3\}$ no, ya que el 2 está entre el 1 y el 3.

Problema 5. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen, para todos los pares de reales x, y , la igualdad:

$$f(f(x) + f(y)) = (x + y)f(x + y)$$

Problema 6. Un cuadrado es particionado en $n^2 \geq 4$ rectángulos usando $2(n - 1)$ líneas, $n - 1$ que son paralelas a un lado del cuadrado y $n - 1$ que son paralelas a otro lado. Pruebe que se pueden elegir $2n$ rectángulos de esta partición, de manera que para cada dos de ellos, se puede colocar uno en el interior del otro (con posibilidad de rotación).

Problema 7. Encuentre todos los enteros $k \geq 3$ con la propiedad de que existen enteros m, n tales que:

- $1 < m < k$ y $1 < n < k$
- $\text{mcd}(m, k) = \text{mcd}(n, k) = 1$
- $m + n > k$
- $k \mid (m - 1)(n - 1)$

Problema 8. $\square ABCD$ es un cuadrilátero convexo. Los ángulos A y C son iguales. M y N son puntos en las rectas AB y BC tales que $MN \parallel AD$ y $MN = 2AD$. Sea K el punto medio de MN y H el ortocentro del $\triangle ABC$. Pruebe que $HK \perp CD$.