Lista de problemas 2

Mayo 2020

Problema 1. Tanish usa cada uno de los dígitos 1, 2, ..., 8, 9 exactamente una vez, para formar un número de 9 dígitos. Repite este proceso 9 veces hasta formar 9 enteros, no necesariamente distintos. La suma de los 9 números termina en S ceros, donde S es un número natural. Determine el máximo valor que Tanish puede darle a S.

Problema 2. En una mesa hay 1000 cartas acomodadas en círculo. En cada carta hay escrito un entero positivo, y estos 1000 números son distintos. Primero, Marwin selecciona una carta y la remueve del círculo, y realiza la siguiente operación: Si en la carta eliminada estaba escrito el entero positivo k, cuenta la k-ésima carta en dirección de las manecillas del reloj que no ha sido removida de su posición, la elimina y repite la operación. Esto se sigue hasta que solo queda una carta en la mesa. ¿Es posible que, inicialmente exista una carta A tal que, no importa la carta que Marwin seleccione de primera, la carta que queda al final siempre es A?

Problema 3. German tiene un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en el la circunferencia Ω, tal que AB no es paralelo a CD y $AB > CD$. AC y BD intersecan en un punto M, y la recta perpendicular a AB que pasa por M, interseca a AB en el punto E. Si EM biseca el ángulo $\angle CED$, pruebe que AB es diámetro de Ω.

Problema 4. Daniel tiene la sucesión (c_n) construida de la siguiente forma:

$$c_1 = 1, c_2 = 1, c_{n+2} = c_{n+1} + \frac{1}{c_n}, n = 1, 2, \ldots$$

Pruebe que $c_{180} > 19$.

Problema 5. Sean ξ_1 y ξ_2 dos circunferencias que se cortan en U y V. Los segmentos PR y QS son cuerdas de ξ_1 y ξ_2 respectivamente, tales que el segmento PQ y la recta RS se intersecan en U. Las rectas QS y PR se intersecan en un punto C. El punto A está en ξ_1 tal que $UA \parallel QS$. El punto A' está en ξ_2 tal que $UA' \parallel PR$. Pruebe que los puntos V, A, C, A' son colineales.

Problema 6. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de todos los números primos, tales que para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$ se cumple que:

$$f(p)^{f(q)} + q^p = f(q)^{f(p)} + p^q$$

Problema 7. Bob tiene un conjunto de n plantas con pesos enteros $w_1, w_2, ..., w_n$, distintos dos a dos. Decimos que este conjunto se llama *rastica* si está construido de manera que, si Bob remueve cualquier planta con un peso w_k, donde $1 \le k \le n$, el resto de plantas del conjunto pueden ser divididas completamente en dos grupos con el mismo peso, aunque no necesariamente la misma cantidad de plantas.
Encuentre todos los n para los cuales Bob puede construir su conjunto *rastica*.

Problema 8. Sean m, a, e las medidas de los lados de un triángulo $\triangle MAE$. Si s es el semiperímetro del triángulo $\triangle MAE$, pruebe que:

$$m^2(s-m)(s-a) + a^2(s-a)(s-e) + e^2(s-e)(s-m) \le \frac{4}{27}s^4$$